

## TMA4400 OG KRETSTEORI

James Clerk Maxwell publiserte på 1860-tallet den første komplette modellen av elektromagnetisme.<sup>1</sup> Denne modellen er formulert som fire likninger,<sup>2</sup> og i moderne notasjon skrives de slik:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} & c^2 \nabla \times B &= \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{J}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

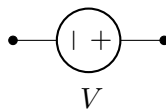
Her er  $E$  det elektriske feltet,<sup>3</sup>  $B$  det magnetiske feltet,<sup>4</sup>  $\rho$  en gitt ladningstetthet,<sup>5</sup>  $J$  en gitt strømtetthet,<sup>6</sup>  $c$  lyshastigheten i vakuum<sup>7</sup> og  $\epsilon_0$  vakuumperrmittiviteten.<sup>8</sup> Hvis du ikke har studert matematikk på universitetsnivå, er det tilnærmet umulig å forstå hva alle symbolene over betyr, så derfor er det vanlig å starte med en forenkling som kalles **kretsteori**.<sup>9</sup> Kretsteori introduseres vanligvis som et verktøy innen elektroteknikk, men kretsabstraksjonen har mange andre andre anvendelser.<sup>10</sup> I dette notatet skal vi fokusere på hvordan TMA4400 kommer til nytte i grunnleggende kretsteori. En **krets** er noen **kretselementer** koblet sammen med ideelle ledere, og på hvert punkt i kretsen er vi interessert i **strømmen**  $i(t)$  og **spenningen**  $v(t)$ . Strømmen er hvor mye ladning som passerer per tidsenhet. For å forstå spenning, kan det være lurt å minnes Coloumbs lov<sup>11</sup>

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

som gir kraften mellom to punktladninger  $q_1$  og  $q_2$  med avstand  $r$ . Hvis du deler ut den ene ladningen og ganger med  $r$  får du spenning, som måles i joule per coulomb eller volt som vi sier på godt norsk. Spenningen i et punkt i kretsen måles relativt til **jord**, som markeres slik:<sup>12</sup>



Det er her du setter den svarte pinnen på multimeteret. En **spenningskilde** er noe som opprettholder en bestemt spenning over sine egne terminaler (de svarte prikkene):



En spenningskilde er en teoretisk abstraksjon av et batteri. Et nivolts batteri har spenning på om lag ni volt mellom terminalene, men dette endrer seg litt etterhvert som batteriet blir utladet.<sup>13</sup>

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Introduction\\_to\\_electromagnetism](https://en.wikipedia.org/wiki/Introduction_to_electromagnetism)

<sup>2</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations)

<sup>3</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Electric\\_field](https://en.wikipedia.org/wiki/Electric_field)

<sup>4</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic\\_field](https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_field)

<sup>5</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Charge\\_density](https://en.wikipedia.org/wiki/Charge_density)

<sup>6</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Current\\_density](https://en.wikipedia.org/wiki/Current_density)

<sup>7</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Speed\\_of\\_light](https://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_light)

<sup>8</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Vacuum\\_permittivity](https://en.wikipedia.org/wiki/Vacuum_permittivity)

<sup>9</sup>Se Lars Lundheims kompendium ([https://lundheim.folk.ntnu.no/hjelpehefte\\_v24.pdf](https://lundheim.folk.ntnu.no/hjelpehefte_v24.pdf)) eller Morten Dinhoff Pedersens notat (TODO) for introduksjon.

<sup>10</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Circuit>

<sup>11</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb's\\_law](https://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb's_law)

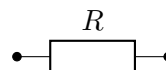
<sup>12</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Ground\\_\(electricity\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Ground_(electricity))

<sup>13</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Electric\\_battery](https://en.wikipedia.org/wiki/Electric_battery)

Et **kretselement** er matematisk abstraksjon av en fysisk dings i en krets. For de vanligste krets-elementene finnes det en relasjon mellom strømmen  $i(t)$  gjennom dingsen og spenningen  $v(t)$  over terminalene - det er derfor strøm og spenning er de fysiske størrelsene man fokuserer mest på i starten. Her er de mest grunnleggende:

### 1. MOTSTAND

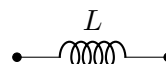
$$v(t) = Ri(t)$$



Dette kan du tenke på som en gammeldags lyspære som lyser og avgir varme.<sup>14</sup> **Motstandsverdien**  $R$  forteller noe om spenningsfallet som en funksjon av strømmen gjennom motstanden.<sup>15</sup>

### 2. SPOLE

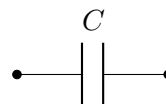
$$v(t) = Li'(t)$$



Dette er en strømledning som er lagt i spiral; trafoen oppe i gaten din er full av disse.<sup>16</sup> **Induktansen**  $L$  avhenger av spolens lengde og geometri og om noen har lagt en spiker inni spiralen og så videre.

### 3. KONDENSATOR

$$v(t) - v(0) = \frac{1}{C} \int_0^t i(s) ds$$



En kondensator er en ting som kan lagre elektrisk energi og slippe den ut igjen, ikke helt ulikt et batteri, men bygget på andre prinsipper og med helt annen oppførsel.<sup>17</sup> **Kapasitansen**  $C$  er et mål på hvor mye ladning som trengs per volt med spenning, og avhenger av størrelsen på kondensatorplatene, hva de er laget av, hvor langt de står fra hverandre, hva slags materiale som ligger mellom dem og så videre. Den enkleste formen for kondensator er to plater som er fysisk adskilte, men laget av et eller annet som kan fylles opp med eller tappes for elektroner. Myelinlaget utenpå nerverådene dine har litt kapasitans, og sørger for at innsiden og utsiden av nervecellen fungerer som en kondensator - ved multipl sklerose degenereres myelinlaget og så blir kapasitansen for høy og så går ikke nervesignalene som de skal.<sup>18</sup>

### 4. DIODE

$$i(v) = i_0 (e^{v/v_0} - 1)$$



Shockleys diodelov gir strømmen  $i$  gjennom en diode som funksjon av spenningen  $v$  over den.<sup>19</sup> Parameteren  $i_0$  kalles **reversstrømmen**. Dette er den maksimale strømmen som kan gå i sperreretningen før dioden ryker. **Den termiske spenningen** er parameteren

$$v_0 = \frac{kT}{nq}$$

der  $k$  er Boltzmanns konstant,<sup>20</sup>  $T$  er temperaturen i Kelvin,<sup>21</sup>  $q$  er elektronladningen,<sup>22</sup> og  $n$  er en diodespesifikk idealitetsfaktor.<sup>23</sup>

<sup>14</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Resistor>

<sup>15</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Ohm%27s\\_law](https://en.wikipedia.org/wiki/Ohm%27s_law)

<sup>16</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Inductor>

<sup>17</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Capacitor>

Kondensatorer kan faktisk være et godt alternativ til batteri i noen anvendelser:

<https://en.wikipedia.org/wiki/Supercapacitor>

<sup>18</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Hodgkin-Huxley\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/Hodgkin-Huxley_model)

<sup>19</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Shockley\\_diode\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Shockley_diode_equation)

<sup>20</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Boltzmann\\_constant](https://en.wikipedia.org/wiki/Boltzmann_constant)

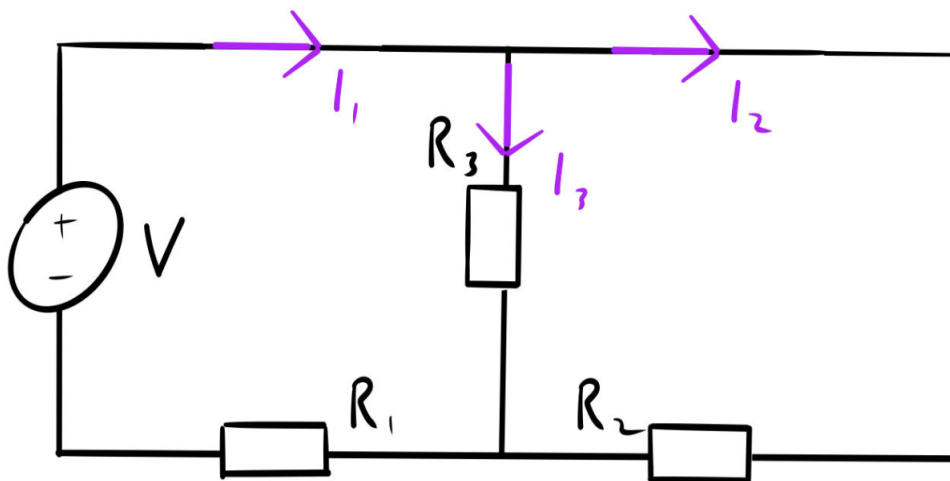
<sup>21</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Kelvin>

<sup>22</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Elementary\\_charge](https://en.wikipedia.org/wiki/Elementary_charge)

<sup>23</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Diode>

**Kirchhoffs strømløv** sier at strømmene inn i et forgreiningpunkt på summere til null og **Kirchhoffs spenningslov** sier at spenningsfallene i en lukket sløyfe må summere til null.<sup>24</sup> Ladning kan ikke oppstår eller forsvinne i løse luften, og du kan ikke endre spenning i et punkt ved å bare rusle en runde runde sløyfen. Kretsanalyse består i bruke disse lovene for å analysere kretser.<sup>25</sup> Nå skal vi tegne noen enkle kretser og se hvordan dette leder til matematiske problemstillinger som skal håndteres i TMA4400. Kretsen under modellerer en høyttaler.

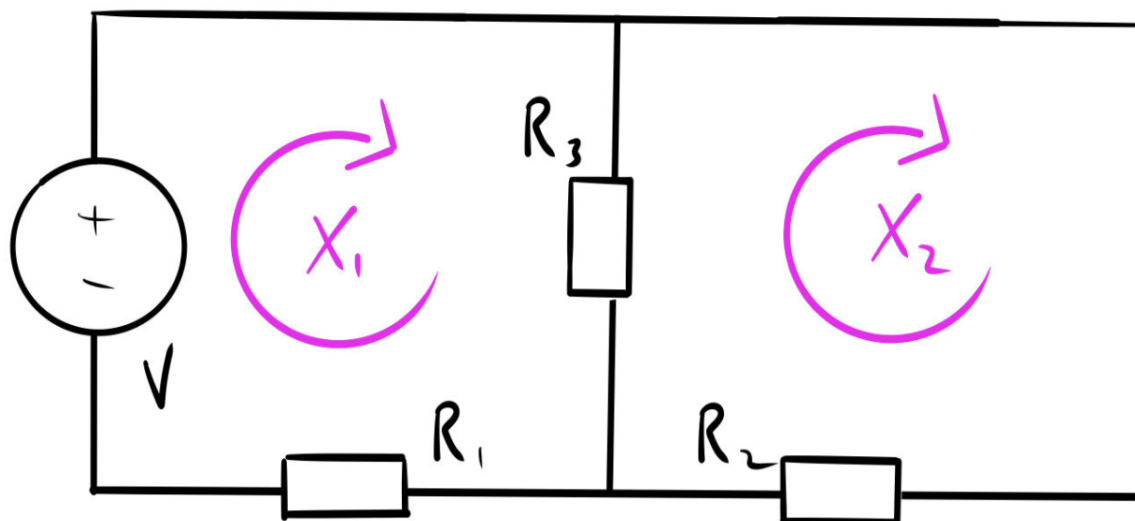
- 1 Sett opp et lineært likningssystem for  $i_1$ ,  $i_2$  og  $i_3$ .  
(Bruk Kirchhoffs spenningslov på sløyfene og Kirchhoffs strømløv på den øverste forgreiningen.)



Det finnes systematiske teknikker for å sette opp lineære likningssystemer for en resistive kretser, altså kretser med kun motstander og spennings- eller strømkilder. Hvis du ser på forgreiningspunktet i kretsen over og har skjønnt Kirchhoffs strømløv, vil du nok innse at

$$i_3 = i_1 - i_2.$$

Dette er utgangspunktet for noe som kalles **maskestrømsmetoden**. Den består i å tenke at de ukjente er sirkulære strømmer som går i bane i hver sløyfe slik:

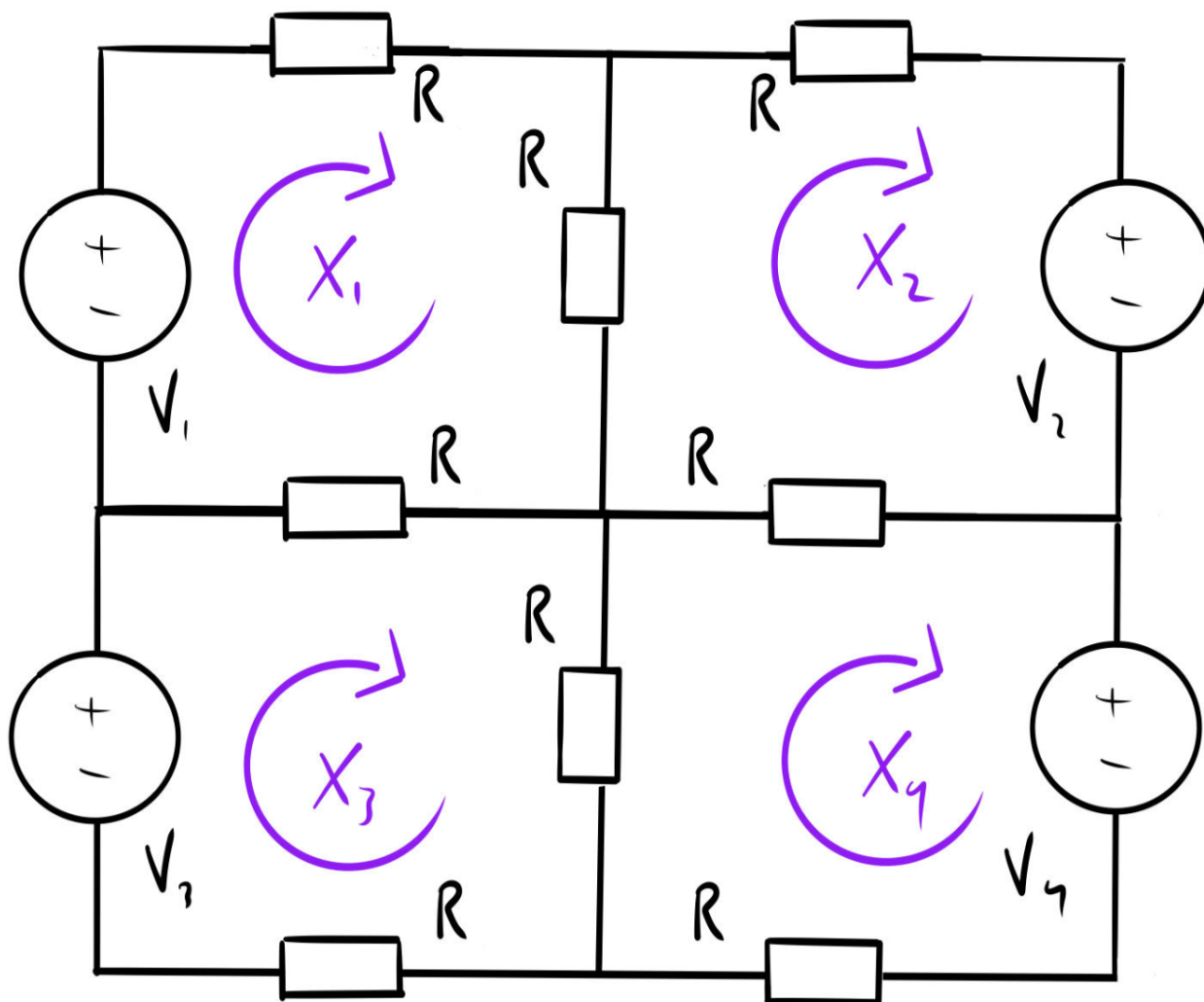


<sup>24</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Kirchhoff%27s\\_circuit\\_laws](https://en.wikipedia.org/wiki/Kirchhoff%27s_circuit_laws)

<sup>25</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Series\\_and\\_parallel\\_circuits](https://en.wikipedia.org/wiki/Series_and_parallel_circuits)

Strømmen gjennom  $R_3$  er  $x_1 - x_2$ , mens strømmen gjennom  $R_1$  og  $R_2$  er henholdsvis  $x_1$  og  $x_2$ . Maskestrømsmetoden fungerer bare på planare kretsen,<sup>26</sup> men den er ryddig, for det blir like mange ukjente strømmen som sløyfer, og man får korrekt antall likninger ved å summere spenningsfallet rundt hver sløyfe. Prøv dette på kretsen under og løs når (alle motstander er like):

$$\boxed{4} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{5} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{6} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{7} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_4 \end{pmatrix} \quad \boxed{8} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$



Laurinda Lie tror på homeopati, og hun har lest at mot migrene er det lurt å drikke vann som har vært varmet opp og nedkjølt av en klump med *spesiell homeopatisk masse*. Laurentius Lie tror på mye rart, men ikke på homeopati. Han er imidlertid en grei fyr, og går med på å regne ut når det homeopatiske vannet har en passelig drikketemperatur.

Den varme homeopatiske klumpen varmes opp og senkes så i et vannbad ute på verandaen, der det er null grader. I den homeopatiske tradisjon ristes alltid vannet på en nøye spesifisert måte, og dette

<sup>26</sup>Noen synes for øvrig maskestrømsmetoden er litt shady, for du kan potensielt ha ukjente som ikke kan måles med et multimeter. Noen mennesker liker å måle alt, og tror ikke på noe før de har vært bortpå med multimeteret.

sørger for perfekt blanding. Hvis vi antar Newtons avkjølingslov, får vi differensiallikningene

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha_1 (x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \alpha_1 (x_1 - x_2) + \alpha_2 (0 - x_2)\end{aligned}$$

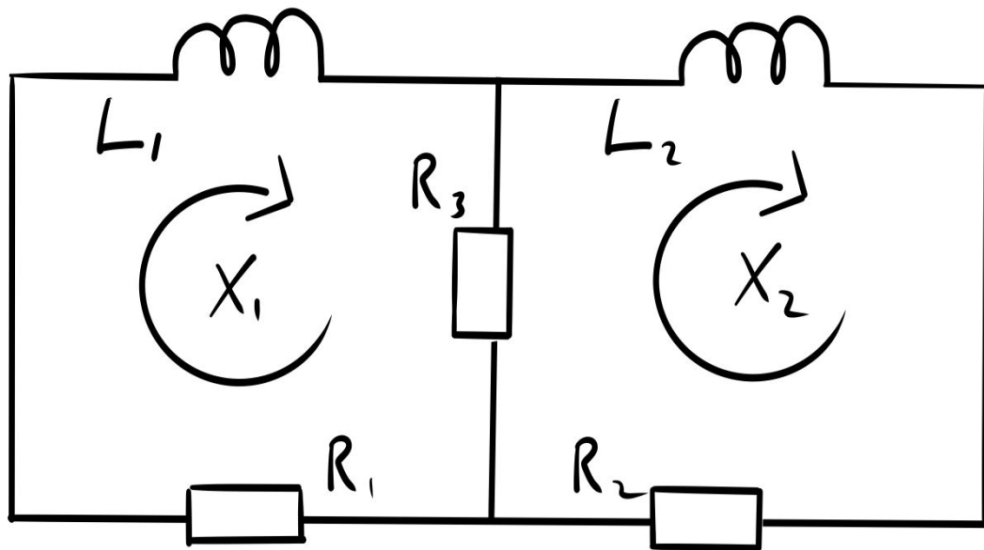
der  $x_1$  er temperaturen i klumpen,  $x_2$  er temperaturen i vannet,  $\alpha_1$  er varmeoverføringskoeffisienten mellom vannet og den homeopatiske klumpen og  $\alpha_2$  er varmeoverføringskoeffisienten mellom vannet og luften på verandaen.

- 1 Høyresiden i dette likningssystemet er et matriseprodukt på formen  $Ax$ . Finn  $A$ .

Dersom du bruker Kirchhoffs spenningslov på sløyfene i kretsen under, får du

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \left( -(R_1 + R_3)x_1 + R_3x_2 \right) / L_1 \\ \dot{x}_2 &= \left( R_2x_1 - (R_2 + R_3)x_2 \right) / L_2\end{aligned}$$

- 2 Høyresiden i dette likningssystemet er et også matriseprodukt på formen  $Ax$ . Finn  $A$ .



Nå skal vi blande sammen lineæralgebra og differensiallikninger. Systemene på forrige side ser grise ut, men det finnes en systematisk løsningsteknikk. La oss sette  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  eller  $L_1 = L_2 = 1$ ,  $R_2 = R_3 = 1$  og  $R_1 = 0$ , slik at vi får et litt håndterlig system:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2\end{aligned}$$

Dette kalles et **lineært og autonomt differensiallikningssystem med konstante koeffisienter**. Det første vi må gjøre, er å sortere den ukjente i en søylevektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

slik at likningssystemet blir

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad \text{der} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alle differensiallikninger vi har løst til nå, har vi løst med eksponensialfunksjonen, så la oss prøve gjetningene  $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$  og  $x_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$ , altså

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{c} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

og se hva som skjer. Setter vi  $\mathbf{x}$  inn i systemet, får vi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lambda e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

på den ene siden og

$$A\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

på den andre. Setter vi disse lik hverandre og deler ut  $e^{\lambda t}$  som vi pleier, får vi

$$\lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

eller

$$\lambda \mathbf{c} = A\mathbf{c}$$

om du vil. Med andre ord må  $\mathbf{c}$  være en av  $A$  sine egenvektorer og  $\lambda$  den korresponderende egenverdien om  $\mathbf{x}$  som foreslått skal være en løsning.

**3** Finn alle løsningene til systemet. Hvor mange forventer du?

Og så det andre vesentlige fellestrekket: *En lineæroperator  $T$  er en funksjon som tilfredsstiller*

$$T(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aT(\mathbf{x}) + bT(\mathbf{y})$$

*for alle vektorer  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{y}$  og alle skalarer  $a$  og  $b$ .*

De enkleste modelleringsproblemene i anvendelser er som regel **lineære**. Å gange en vektor inn i en matrise er en lineæroperator. Her er et par oppgaver som illustrerer poenget. La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

og beregn:

15  $Ax$  16  $Ay$  17  $A(x+y)$  18  $Ax + Ay$  19  $A(2x+3y)$  20  $2Ax+3Ay$

Kjært barn har mange navn, og lineæroperator har et par synonymer, **lineærtransform**, **lineærtransformasjon** og **lineæravbildning**. Jeg har vendt meg til å si lineæroperator fordi det er det de fleste ikkematematikere sier. Du har brukt lineæroperatorer i mange år - derivasjonsoperatoren er for eksempel lineær. La

$$D(x) = \dot{x} \quad \text{og} \quad y(t) = t^2 \quad \text{og} \quad z(t) = t$$

og beregn

15  $\dot{y}$  16  $\dot{z}$  17  $\frac{d}{dt}(y+z)$  18  $\dot{y} + \dot{z}$  19  $\frac{d}{dt}(2y+3z)$  20  $2\dot{y} + 3\dot{z}$

21 Fikk du deja vú nå? I så fall er du inne på noe.

Det bestemte integralet er også en lineæroperator. La  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  være gitt ved

$$f(t) = \sin t$$

og  $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  være gitt ved

$$f(t) = \cos(t/2)$$

og finn de bestemte integralene

15  $\int f$  16  $\int g$  17  $\int g + f$  18  $\int g + \int f$  19  $\int 2g + 3f$  20  $2 \int g + 3 \int f$

21 Fikk du deja vú nå? I så fall er du inne på noe.

Lineæroperatorer er **superposisjonsprinsippets**<sup>27</sup> mest vesentlige ingrediens. Lineæroperatorer er for superposisjonsprinsippet omtrent som kanel i en kanelbolle, humle i øl eller hele pepperkorn i fårikål. Kanelbolle er meningsløst uten kanel, men man merker kanelsmaken først når den uteblir.<sup>28</sup> Superposisjonsprinsippet kan formuleres omtrent som følger:

$$\text{Dersom } L \text{ er en lineæroperator og } Lx = f \text{ og } Ly = g, \text{ er } L(x+y) = f + g.$$

22 Dette prinsippet har vi allerede brukt ganske mye dette semesteret. Finn ut hvor.

<sup>27</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Superposition\\_principle](https://en.wikipedia.org/wiki/Superposition_principle)

<sup>28</sup>Kanel smaker faktisk ingenting. Prøv å spise en kanelbolle eller en porsjon risengrynsgrøt mens du holder deg for nesen.

Vi sier at en differensiallikning er lineær dersom operatoren der du "putter inn løsningen" i likningen er lineær. For eksempel er  $\dot{x} + \lambda x = 0$  en lineær likning siden

$$D(x) = \dot{x} + \lambda x = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right) x$$

er en lineæroperator. Superposisjonsprinsippet sier at dersom

$$\dot{x} + \lambda x = f \quad \text{og} \quad \dot{y} + \lambda y = g \quad \text{og} \quad z = x + y \quad \text{er} \quad \dot{z} + \lambda z = f + g.$$

Så hva er den praktiske nytten? Her er to RC-kretser:



Differensiallikningen til den til venstre er

$$\dot{v}(t) + \frac{1}{RC}v(t) = 9$$

med løsning

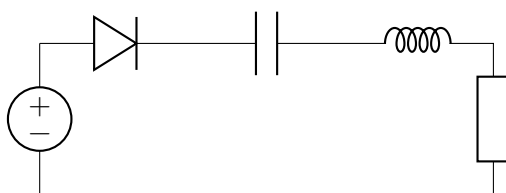
$$v(t) = 9(1 - e^{-t/RC})$$

gitt at  $v(0) = 0$ . I den til høyre er det koblet to batterier i serie, og ifølge Kirchhoff må vi løse

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = 9 + 9 = 18.$$

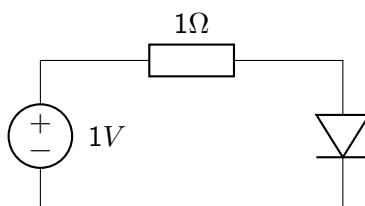
23 Anta  $v(0) = 0$  og løs med superposisjonsprinsippet.

Hvis du vil ha en uløselig differensiallikning fra kretsteorien, er det bare å slenge på en diode. Kretsen under er en dårlig frekvensfordobler, og du får det samme problemet med implisitte metoder som for den kokte krystallen.



22 Anta at  $i(0) = 1$  etter at spenningskilden er slått av, sett parametrene til et eller annet, og finn strømmen.

13 Det er lett å finne frem til en krets der det vi må ty til numeriske likningslødere. Dere som går elsys eller kyb har allerede koblet den opp i ADE:



Vi er mest interesserte i den matematiske oppførselen til likningen, og derfor setter vi både  $\frac{q}{nkT} = 1$  og  $I_0 = 1$  slik at likningen blir

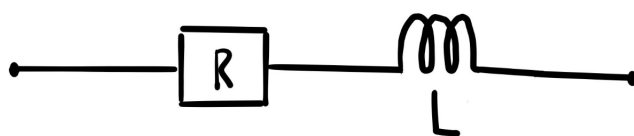
$$i(v) = e^v - 1$$

for det blir så greit. Kirchhoffs spenningslov gir likningen

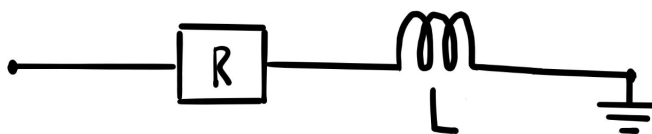
$$1 = i + \ln(i + 1)$$

for strømmen i kretsen. Finn strømmen.

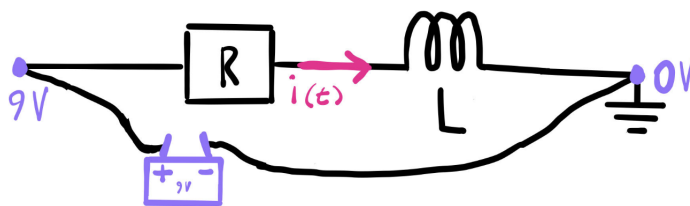
retsteori er anvendelig i andre fagfelt enn kretsteknikk - i elektrokjemi er det uunværlig, og det finnes en egen forskningsretning som studerer forholdet mellom kretsteori og kjemiske reaksjoner.<sup>29</sup> La oss nå sette en motstand og en spole i serie slik:



Så må vi bestemme oss for nullnivået for spenning. Dette kalles *jord*, og indikeres slik:



Hvis vi nå kobler et batteri vil det begynne å gå strøm:



Dette kalles en *RL-krets*, og vi kan finne strømmen  $i(t)$  ved å sette opp en differensiallikning. Spenningen mellom de to lilla punktene er 9 volt, og det spiller ingen rolle om vi går via batteriet eller de to seriekoblede kretselementene. Dette kalles **Kirchhoffs spenningslov**, og gir at

$$Li'(t) + Ri(t) = 9$$

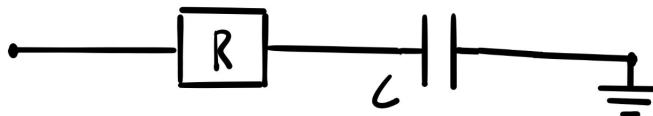
**17** Finn strømmen  $i$ . (Du kan anta at  $i(0) = 0$ .)

<sup>29</sup><https://journals.aps.org/prx/abstract/10.1103/PhysRevX.13.021041>

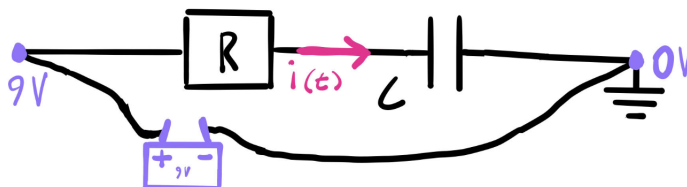
TMA4400



Vi kan gjøre det samme med en kondensator:



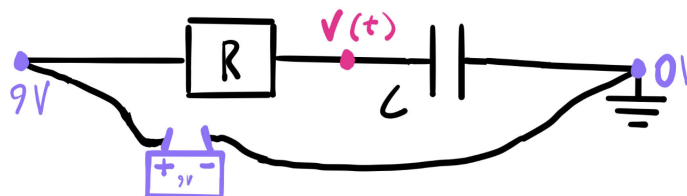
Setter vi på et 9 volts batteri, vil det også nå gå strøm i kretsen:



Dette kalles en RC-krets, og på samme måte som for RL-kretsen, kan vi sette opp en likning ved å kreve at spenningen mellom de to lilla punktene er det samme over batteriet som over seriekoblingen av elementene:

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(s) ds = 9.$$

Huff og huff, integrallikninger har vi ikke lært å løse. Det er nok best å gjøre litt om her og sette kondensatorspenningen opp som ukjent istedet:



Dersom vi antar  $v(0) = 0$ , er den ukjente gitt ved

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(s) ds$$

og følgelig er

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{C} i(t)$$

slik at differensiallikningen blir

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = 9.$$

18 Finn  $v(t)$ . (Husk at  $v(0) = 0$ .)

19 Modellerer uten prediktiv kraft er verdt null og niks. Finn en person med elsyskoffert og få vedkommende til å koble opp denne kretsen. Regn og mål og dobbeltsjekk at det er sånn omtrent riktig. Den svarte pinnen på multimeteret skal på jord, og den røde på  $v(t)$ .

RC- og RL-kretsen modelleres av nøyaktig samme differensiallikning som Newtons avkjølingslov og E. Coli og radioaktiv nedbrytning. På de foregående ti sidene har du grunnen til å lære matematikk i et nøtteskall - ett og samme initialverdiproblem

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) + \beta \quad x(0) = x_0$$

med løsning

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{\beta}{\lambda}\right) e^{\lambda t} - \frac{\beta}{\lambda}$$

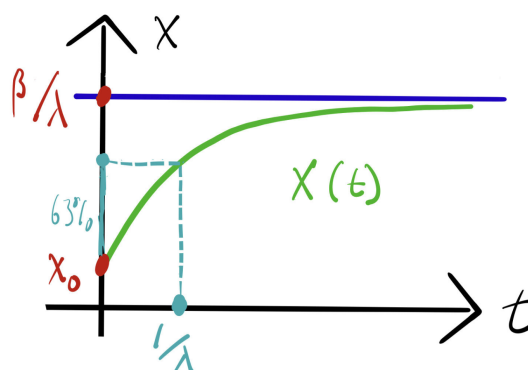
er en modell for så mange forskjellige ting at det er galskap å bli ingeniør uten å lære seg det.

Matematikere foretrekker av ymse grunner å bytte fortegn på  $a$  og sortere likningen slik at alt som involverer den ukjente  $x$  står på den ene siden av likningen:

$$\dot{x}(t) + \lambda x(t) = \beta$$

Løsningen blir da

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\beta}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} + \frac{\beta}{\lambda}$$



istedet. Til høyre er et generisk plot.

Vi kaller  $1/\lambda$  **tidskonstanten** til differensiallikningen.<sup>30</sup> Siden  $1/e \approx 0.36787944117$ , ser vi at ved  $t = 1/\lambda$ , har  $x$  nådd om lag 63 prosent av veien fra  $x_0$  til  $\beta/\lambda$ . Dette initialverdi problemet er forresten et eksempel på et **lineært tidsinvariant system**<sup>31</sup> og hvis du sier til en gammel ingeniør at du har et LTI-system med tidskonstant sånn og sånn, vil figuren over umiddelbart dukke opp på vedkommendes hjernebark. Til og med leger bruker dette; naboen min er nukleærmedisiner.<sup>32</sup>

20 Finn tidskonstantene til alle problemene du har løst så langt.



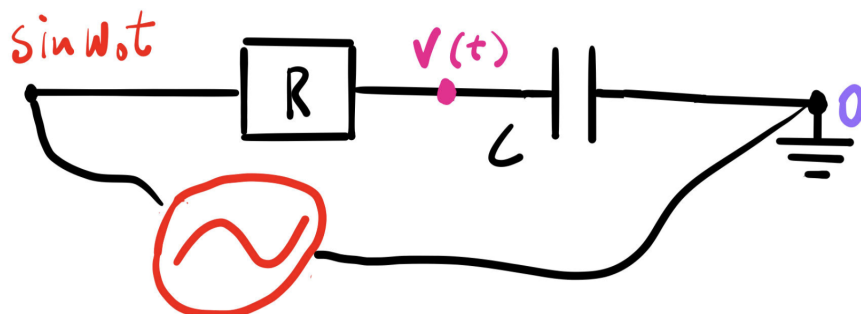
<sup>30</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Time\\_constant](https://en.wikipedia.org/wiki/Time_constant)

<sup>31</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Linear\\_time-invariant\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_time-invariant_system)

<sup>32</sup><https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-4012-3>

Stikkontakten i veggen har ikke likespenning, slik som et batteri. Spenningen er mere sinusoidal, for den er generert av en roterende turbin i et vannkraftverk.<sup>33</sup> Dersom du bytter ut batteriet i RC-kretsen med en sinusoidal spenning med vinkelfrekvens  $\omega_0$ , gir Kirchhoffs spenningslov

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = \sin(\omega_0 t).$$



Det går faktisk an å utlede en formel for løsningen til

$$\dot{x}(t) + \lambda x(t) = f(t) \quad x(0) = x_0$$

der  $x$  er den ukjente og  $f$  er en gitt funksjon, kalt **påtrykket**. Påtrykket er noe som leverer en påvirkning av systemet som er *uavhengig av oppførselen til  $x$* . Vi har behandlet spesialtilfellet  $f(t) = \beta$ , men nå kan altså  $f$  få være hva som helst. Trikset er å gjette på en løsning på formen

$$x(t) = c(t)e^{-\lambda t}.$$

Det er lettere å forstå hvor denne ideen kommer fra når man studerer systemer av differensiallikninger, så det skal vi komme tilbake til et annet semester, men la oss nå teste ut hva som skjer. Dersom vi setter  $c(t)e^{-\lambda t}$  inn i likningen, får vi en pen kansellering, og så står vi igjen med

$$\dot{c}(t)e^{-\lambda t} = f(t).$$

Vi kan nå gange opp med  $e^{\lambda t}$  og integrere:

$$c(t) = \int_0^t f(s)e^{\lambda s} ds$$

Vi har nå en funksjon

$$x(t) = c(t)e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \int_0^t f(s)e^{\lambda s} ds$$

som løser initialverdiproblemet

$$\dot{x}(t) + \lambda x(t) = f(t) \quad x(0) = 0.$$

Å finne en løsning som tilfredsstiller  $x(0) = x_0$  er nå lett - vi bare legger til  $x_0 e^{-\lambda t}$  (dette går bra siden den kansellerer på venstresiden av differensiallikningen), og får

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \int_0^t f(s)e^{\lambda s} ds \\ &= x_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t f(s)e^{-\lambda(t-s)} ds \\ &= x_h(t) + x_p(t) \end{aligned}$$

<sup>33</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Alternating\\_current](https://en.wikipedia.org/wiki/Alternating_current)

der  $x_h$  står for **homogen løsning** og  $x_p$  for **partikulær løsning**. Uttrykket

$$\int_0^t f(s)e^{-\lambda(t-s)} ds$$

kalles en **folding** eller **konvolusjon**. Hvis du har lest en mer avansert bok om differensiallikninger vet du at dette er den eneste løsningen du noensinne kommer til å finne.

21 Denne utledningen kan du bli spurt om på eksamen.

22 Løs  $RC\dot{v}(t) + v(t) = \sin(\omega_0 t)$   $v(0) = v_0$ .

På skolen lærte du Newtons andre lov  $F = ma$ . Dette er en differensiallikning, men på skolen ble du nok stort sett plaget med konstante krefter og konstant akselerasjon. Den generelle varianten sier at kraft er lik tidsendring av bevegelsesmengde:

$$F = \frac{d}{dt}(m\dot{x})$$

Du tenker kanskje at det er rart å tidsderivere massen  $m$ , men dersom du reiser rundt i en ting der drivstoffet er en betydelig del av totalvekten, kan massen endre seg betraktelig med tiden. Vi skal ikke plages med variabel masse, så derfor kan vi skrive Newtons andre lov slik:

$$F = m\ddot{x}$$

Her er et klassisk eksempel. En kloss med masse  $m$  sklir friksjonsfritt på underlaget, og er festet til veggen med en fjær med fjærstivhet  $k > 0$ . Hookes fjærlov<sup>1</sup> sier at kraften  $F(x)$  fra fjæren på klossen er proporsjonal med avstanden  $x$  fjæren er strukket:

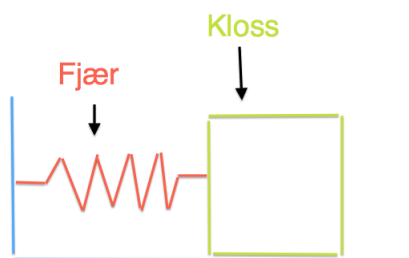
$$F(x) = -kx$$

Dersom  $x(t)$  er klossens posisjon, er klossens akselerasjon gitt ved  $\ddot{x}(t)$ , og Newtons andre lov gir

$$-kx(t) = m\ddot{x}(t).$$

Vi rydder litt og setter  $k/m = 1$ , og får

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0.$$



Dette er også et LTI-system, og er det noe du bør ha i ryggmargen, er det at man bør sjekke ut løsninger på formen

$$x(t) = e^{\lambda t}.$$

0 Hva må  $\lambda$  være for at denne skal passe i likningen?

I forrige økt ba jeg deg om å lete etter løsninger til kloss-og-fjærlikningen

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0,$$

men jeg sa aldri hva de var - vi må nemlig ha komplekse tall for å håndtere løsningene på en fornuftig måte. Før vi lærer den generelle løsningsteknikken, skal vi introdusere en kraft til. **Friksjonskraft** er

som regel avhengig av farten  $\dot{x}$ , og hele tiden rettet mot fartsretningen. Friksjon er komplisert,<sup>34</sup> men det er ikke uvanlig å anta at friksjonskraften er proporsjonal med  $\dot{x}$ :

$$F(\dot{x}) = -\mu\dot{x}$$

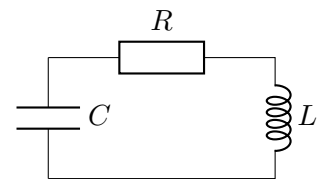
Dette er i mange systemer en rimelig antagelse dersom hastigheten er lav, og uansett det eneste som er banalt nok til at vi kan håndtere det her og nå. Newtons andre lov  $F = m\ddot{x}$  blir

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \mu\dot{x}(t),$$

dersom klossen opplever en slik friksjon i tillegg til fjærkraften. Vi rydder og skriver

$$\ddot{x}(t) + \frac{\mu}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0.$$

- 1 Hvis du nå tror at du kun studerer kloss og fjær ved å løse denne likningen, kan du prøve å bruke Kirchhoffs spenningslov på denne kretsen.



<sup>34</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Friction>

Det bør altså være klart at én og samme differensiallikning kan ha mange mange bruksområder.<sup>35</sup> Vidt forskjellige fysiske fenomener kan oppføre seg dønn likt matematisk sett. Nå skal vi se på hvordan vi finner løsningene på de foregående likningene. Det er litt mer kjelkete med andre ordens likninger, så la oss sette  $m = L = 1$ ,  $\mu = R = 3$  og  $k = 1/C = 2$ , slik at vi får likningen

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0.$$

Det første vi gjør er å observere at siden

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

kan vi “faktorisere” likningen slik:

$$\left(\frac{d}{dt} + 1\right) \left(\frac{d}{dt} + 2\right) x(t) = 0$$

La nå oss nå innføre en hjelpevariabel

$$y(t) = \left(\frac{d}{dt} + 2\right) x(t) = \dot{x}(t) + 2x(t).$$

Denne tilfredsstiller

$$0 = \left(\frac{d}{dt} + 1\right) y(t) = \dot{y}(t) + y(t),$$

som impliserer at

$$y(t) = c_1 e^{-t}.$$

Men i så fall må

$$\dot{x}(t) + 2x(t) = c_1 e^{-t}$$

slik at

$$\begin{aligned} x(t) &= c_2 e^{-2t} + c_1 \int^t e^{2(s-t)} e^{-s} ds \\ &= c_2 e^{-2t} + c_1 \int^t e^{s-2t} ds = c_2 e^{-2t} - c_1 e^{-t}. \end{aligned}$$

Siden  $c_1$  bare er en integrasjonskonstant, kan vi bytte fortegn og skrive løsningen litt penere:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}.$$

Hvis du nå studerer dette litt nøye, vil du se at det er ingenting spesielt med likningen

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0.$$

Hadde vi prøvd å løse

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = 0$$

kunne vi gått frem på samme måte, og funnet at

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

---

<sup>35</sup>[https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I\\_21.html](https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_21.html)

der  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  er røttene til likningens **karakteristiske polynom**

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = a_2 (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2).$$

Denne strategien produserer korrekte løsninger så lenge  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Dersom  $\lambda_1 = \lambda_2$  blir det litt annerledes, men dette tilfellet er en matematisk abstraksjon som sjelden inntreffer i virkelige anvendelser. Det er av mange grunner mest praktisk å dele ut  $a_2$  eller sette  $a_2 = 1$ , for hvis  $a_2$  skulle slumpe til å bli null, blir det rot i systemet siden likningen ikke lenger er av andre orden. Derfor skriver vi

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

som er en **homogen andre ordens lineær differensiallikning med konstante koeffisienter**. La

$$\delta = -\frac{a_1}{2} \quad \text{og} \quad \omega_0 = \left| \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \right|.$$

Løsningen klassifiseres i tre forskjellige tilfeller alt etter fortegnet på  $a_1^2 - 4a_0$ :

**1:** Dersom  $a_1^2 - 4a_0 > 0$  blir det enkelt, da finnes det to reelle røtter

$$\lambda = \delta \pm \omega_0$$

slik at

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{(\delta + \omega_0)t} + c_2 e^{(\delta - \omega_0)t} \\ &= e^{\delta t} (c_1 e^{\omega_0 t} + c_2 e^{-\omega_0 t}). \end{aligned}$$

**2:** Dersom  $a_1^2 - 4a_0 = 0$ , finnes det en dobbel rot  $\lambda = \delta$ , og løsningen blir

$$x(t) = c_1 e^{\delta t} + c_2 t e^{\delta t}.$$

**3:** Dersom  $a_1^2 - 4a_0 < 0$ , er løsningen til den karakteristiske likningen

$$\lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} = -\frac{a_1}{2} \pm i \frac{\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2} = \delta \pm i\omega_0$$

slik at

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{(\delta + i\omega_0)t} + c_2 e^{(\delta - i\omega_0)t} \\ &= e^{\delta t} (c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}) \\ &= e^{\delta t} (d_1 \cos(\omega_0 t) + d_2 \sin(\omega_0 t)). \end{aligned} \quad \begin{aligned} d_1 &= c_1 + c_2 \\ d_2 &= i(c_1 - c_2) \end{aligned}$$

Skriv opp løsningen når

$$\boxed{2} \quad a_1 = a_0 = 1. \quad \boxed{3} \quad a_1 = 2, a_0 = 1 \quad \boxed{4} \quad a_1 = 0, a_0 = 1 \quad \boxed{5} \quad a_1 = 3, a_0 = 1$$

Løsningen til

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0,$$

er

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

der  $c_1$  og  $c_2$  er vilkårlige konstanter. Dette systemet kalles en harmonisk oscillator, og løsningen er en bevegelse som aldri stopper opp. Hvis vi skal beregne en faktisk løsningsstrajektorie, må vi vite noe om både startposisjon og startfart. Finn  $x$  dersom

$$\boxed{6} \quad x(0) = 1 \text{ og } \dot{x}(0) = 0.$$

$$\boxed{7} \quad x(0) = 0 \text{ og } \dot{x}(0) = 1.$$

$$\boxed{8} \quad x(0) = x_0 \text{ og } \dot{x}(0) = v_0.$$

Kirchhoffs spenningslov sier at spenningsfallet over en lukket sløyfe i en elektrisk krets alltid må være null. I likhet med Newtons andre lov, er dette også en differensiallikning dersom du har spoler eller kondensatorer i kretsen. Det har man alltid, for alle kretser har bittelitt tilsiktet eller utilsiktet kapasitans og induktans. Kirchhoffs spenningslov på kretsen til høyre gir

$$L\dot{i}(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(s) ds = 0$$

og deriverer vi hele greia, får vi

$$L\ddot{i}(t) + \frac{1}{C}i(t) = 0,$$



som har løsning

$$i(t) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right).$$

Dette systemet er også en harmonisk oscillator, og matematisk identisk med fjæren og klossen. Om du bare fikk løsningsstrajektorien i et plot og ingen informasjon om hva det var for noe, er det ikke mulig å gjette om løsningen kommer fra en spole og kondensator eller en fjær og en kloss.

Spenningen over kondensatoren er proporsjonal med hvor mye ladning som er kjørt inn på den:

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(s) ds$$

Med andre ord kan vi lade den opp med et batteri først og så koble av batteriet og så koble kondensatoren i sløyfe med noe annet mens det er spenning på den. Da vil strømmen begynne å gå i kretsen, og denne vil oppføre seg etter differensiallikningen over. Finn  $i(t)$  dersom

$$\boxed{9} \quad i(0) = 1 \text{ og } \dot{i}(0) = 0.$$

$$\boxed{10} \quad i(0) = 0 \text{ og } \dot{i}(0) = 1.$$

$$\boxed{11} \quad i(0) = i_0 \text{ og } \dot{i}(0) = v_0.$$