Kinematikk

M.D. Pedersen

15. oktober 2024

Innhold

1 Kinematikk & Kinetikk

Kinematikk Er læren om objekters bevegelse uten hensyn til årsakene til denne bevegelsen. Kinematikken fokuserer på posisjon, hastighet og akselerasjon av objekter, men tar ikke i betraktning krefter eller inerti.

Kinetikk Beskriver bevegelsen av objekter med tanke på kreftene som forårsaker denne bevegelsen. I motsetning til kinematikk, tar kinetikk hensyn til faktorer som masse og kraft når man ser på objekters bevegelse.

2 Vektoroperasjoner

I kybrelatert kinematikk og kinetikk jobber man som regel koordinatbasert, det vil si ut ifra et (eller flere) koordinatsystemer. Da kan vi tildele vektorer $\mathbf{u}$ tallverdier og jobbe konkret, snarere enn å benytte oss av såkalte koordinatfrie beskrivelser hvor vektorene $\vec{u}$ er rent geometriske objekter uten numeriske verdier. Det koordinatbaserte rammeverket for vektorer vil være nytt for mange, så dette avsnittet etablerer noen grunnideer i så henseende.

2.1. Indre, ytre og kryssprodukter. En *vektor* i tre dimensjoner er en 3×1 vektor på formen

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Vi skriver *koordinater* på samme vis:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Indreprodukter, ytreprodukter og kryssprodukter er sentrale i Euklidsk geometri. Den koordinatbaserte analogen til indreproduktet $(\,\cdot\,)$ er operasjonen

$$\phi = \mathbf{u}^\intercal \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad \text{(Indreprodukt)}. \tag{3}$$

Indreproduktet brukes til å definere den *Euklidske normen*:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}^\intercal \mathbf{v}}. \tag{4}$$

Denne normen er *homogen* $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$, *subadditiv* med $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{u}\|$ og *positiv definitt* slik at $\|\mathbf{v}\| > 0$ for alle $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Vi bemerker at de foregående egenskapene er gyldig for normer generelt.

Ytreprodukter $(\,\otimes\,)$ beregnes via vektorproduktet

$$\mathbf{D} = \mathbf{u}\mathbf{v}^\intercal = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Matrisen $\mathbf{D}$ som resulterer fra et ytreprodukt kalles en *dyade*.

Eksempel 1.
Singulærverdidekomposisjonen dekomponerer en matrise som en vektet sum av dyader. I tre dimensjoner skriver vi

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\intercal = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^\intercal + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^\intercal + \sigma_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3^\intercal. \tag{6}$$

Singulærverdiene

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0, \tag{7}$$

er ikke-negative tall som vekter bidraget fra hver dyade. Vektorene i matrisen $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$ og matrisen $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix}$ er *ortonormale*. For $\mathbf{V}$ tilsier den ortonormale egenskapen at $\mathbf{v}_i^\intercal \mathbf{v}_j = 1$ for $i = j$ men 0 ellers. Kolonnene i $\mathbf{U}$ oppfører seg på samme måte. Singulærverdidekomposisjonen er helt sentral i lineær algebra, se f.eks. Kalman [1996].

En tredje sentral vektoroperasjon er kryssproduktet $(\times)$. For å beregne dette produktet definerer vi en *kryssproduktmatrise*

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Med denne devisen er kryssproduktet $\mathbf{w}$ til $\mathbf{u}$ med $\mathbf{v}$ gitt som

$$\mathbf{w} = \mathbf{S}(\mathbf{u})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Kryssprodukter har en rekke nyttige egenskaper. Merk først at $\mathbf{S}(\mathbf{u})\mathbf{v} = -\mathbf{S}(\mathbf{v})\mathbf{u}$ som reflekterer den antikommutative egenskapen til det geometriske kryssproduktet. Noter deretter at $\mathbf{S}(\mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ som er et spesialtilfelle av den foregående egenskapen. Legg til sist merke til at $\mathbf{S}$-matrisen alltid er *skjevsymmetrisk* med egenskapen

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) + \mathbf{S}^{\mathsf{T}}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{0} \text{ for alle } \mathbf{u}. \tag{10}$$

Denne egenskapen forklarer hvorfor nettopp bokstaven $\mathbf{S}$ blir brukt i benevnelsen av kryssproduktmatrisen. Det er fornuftig å bite seg merke i denne detaljen da den er vesentlig i mange utledninger.

Lagranges identitet relaterer indreprodukter, ytreprodukter og kryssprodukter med:

$$\mathbf{S}(\mathbf{u})\mathbf{S}(\mathbf{v}) + (\mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{u})\mathbf{I} = \mathbf{v}\mathbf{u}^{\mathsf{T}}. \tag{11}$$

Jacobis identitet er nyttig i enkelte manipuleringer med kryssprodukter:

$$\mathbf{S}(\mathbf{u})\mathbf{S}(\mathbf{v})\mathbf{w} + \mathbf{S}(\mathbf{w})\mathbf{S}(\mathbf{u})\mathbf{v} + \mathbf{S}(\mathbf{v})\mathbf{S}(\mathbf{w})\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}. \tag{12}$$

Disse identitetene kan bevises på enkelt (om enn tidkrevende) vis ved å gange ut produktene.

Oppgave 1.
La enhetsvektorene i tre dimensjoner være definert ved

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Beregn alle parvise indreprodukter mellom disse vektorene. Hva ser du? Beregn deretter alle parvise kryssprodukter. Kan du finne et system på hvordan disse kryssproduktene henger sammen?

3 Rotasjoner

Figur 1 viser rotasjonen av en vektor $\mathbf{u}_0$ inn i den roterte vektoren $\mathbf{u}_\vartheta$. Dette avsnittet utvikler elementer av teorien til slike rotasjoner.

3.1. **Rotasjonsmatriser.** For å kunne diskutere rotasjon trenger vi en *rotasjonsakse* $\mathbf{n}$ og en *rotasjonsvinkel* ϑ. Dette er illustrert i figur 1. Rotasjonsaksen peker ut en retning og settes derfor til enhetslengde slik at

$$\|\mathbf{n}\| \equiv 1. \tag{14}$$

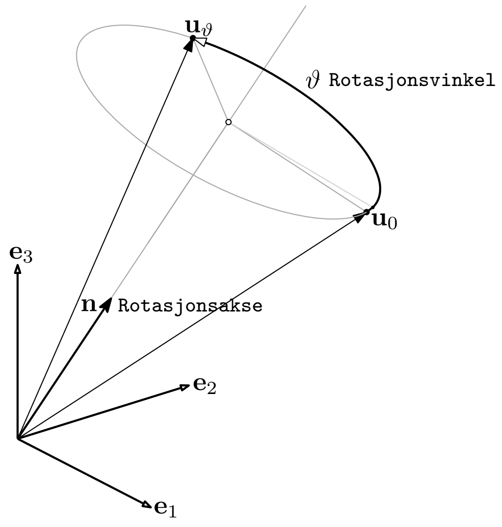
La oss gjøre tre innledende betraktninger:

1. Rotasjoner endrer ikke lengde på det som roteres. Med referanse til figur 1 krever vi altså at:

$$\|\mathbf{u}_0\| = \|\mathbf{u}_\vartheta\|. \tag{15}$$

   Vi kaller denne egenskapen *isometri*.

2. Vektorer som er parallelle med rotasjonsaksen endres ikke.
3. Rotasjoner kan brytes opp i mindre delrotasjoner. For eksempel: hvis målet er å rotere $90°$ kan dette åpenbart gjøres ved først å rotere $30°$ og deretter $60°$ langs den samme aksen.



Figur 1: Rotasjon av vektoren $\mathbf{u}_0$ rundt aksen $\mathbf{n}$ med en vinkel ϑ. En rotert vektor $\mathbf{u}_\vartheta$ resulterer. Høyrehåndsregelen peker ut rotasjonen som positiv.

La oss nå konstruere funksjonen som sender $\mathbf{u}_0$ til sin roterte motpart $\mathbf{u}_\vartheta$. En fremgangsmetode for å konstruere en generell rotasjonsmatrise er å studere en svært liten delrotasjon rundt $\mathbf{n}$-aksen. Da kan den endelige rotasjonen bygges opp ved å gjenta denne lille rotasjonen et antall ganger.

En *ansatz*[1] for en slik rotasjon, med en forsvinnende liten vinkel $\epsilon \ll 1$, er gitt ved

$$\mathbf{u}' = (\mathbf{I} + \epsilon\mathbf{S}(\mathbf{n}))\mathbf{u}. \tag{16}$$

Her angir $\mathbf{u}'$ en rotert motpart til $\mathbf{u}$. Den lille "delrotasjonen" i ovenstående formel er i samsvar med alle de tre innledende betraktningene:

1. Direkte beregning av lengden til $\mathbf{u}'$, hvor den skjevsymmetriske egenskapen $\mathbf{S}(\mathbf{v}) = -\mathbf{S}^{\mathsf{T}}(\mathbf{v})$ kommer til anvendelse, gir

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}'\|^2 = \mathbf{u}'^{\mathsf{T}}\mathbf{u}' &= \mathbf{u}^{\mathsf{T}}(\mathbf{I} - \epsilon\mathbf{S}(\mathbf{n}))(\mathbf{I} + \epsilon\mathbf{S}(\mathbf{n}))\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} - \epsilon^2(\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{S}^2(\mathbf{n})\mathbf{u}) \approx \|\mathbf{u}\|^2. \end{aligned} \tag{17}$$

   Vi setter $\epsilon^2 \approx 0$ som er konsistent med antagelsen $\epsilon \ll 1$. Jo mindre delrotasjon, jo bedre blir antagelsen (som er god til andre orden i ϵ). Delrotasjonen bevarer altså lengden til vektoren som blir rotert asymptotisk godt.

2. Hvis vektoren som blir rotert er parallell med rotasjonsaksen slik at $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{n}$ har vi

$$\mathbf{u}' = (\mathbf{I} + \epsilon\mathbf{S}(\mathbf{n}))(\alpha\mathbf{n}) = \alpha\mathbf{n} = \mathbf{u}. \tag{18}$$

   Her bruker vi egenskapen til kryssproduktet at produktet av parallelle vektorer er null slik at $\mathbf{S}(\mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Delrotasjonen endrer altså ikke vektorer som er parallelle med rotasjonsaksen.

3. Det er mulig å repetere delrotasjonen. Del inn vinkelen ϑ i k like deler og skriv $\epsilon = \vartheta/k$. Ved å øke antall inndelinger blir hver delrotasjon mer nøyaktig og vi kan dermed skrive den endelig rotasjonen med vinkel ϑ som grensen

$$\mathbf{u}_\vartheta = \lim_{k\to\infty} (\mathbf{I} + (\vartheta/k)\mathbf{S}(\mathbf{n}))^k \mathbf{u}_0. \tag{19}$$

[1] Akademisk obfuskasjon med betydning "utdannet gjett".

Den årvåkne leser vil gjenkjenne matriseeksponenten i det ovenstående uttrykket. Vi har

$$\mathbf{u}_\vartheta = e^{\mathbf{S}(\mathbf{n}\vartheta)}\mathbf{u}_0. \tag{20}$$

Dette siste steget gir oss en kompakt og gjennomskuelig formel for rotasjon av vektorer.

Vi kaller resultatet av den ovenstående utledningen

$$e^{\mathbf{S}(\mathbf{n}\vartheta)} = \mathbf{R}(\mathbf{n}\vartheta) \tag{21}$$

en *rotasjonsmatrise*. Velg en rotasjonsakse $\mathbf{n}$, en vinkel ϑ og beregn $\mathbf{R}(\mathbf{n}\vartheta) = e^{\mathbf{S}(\mathbf{n}\vartheta)}$. Da er $\mathbf{u}_\vartheta = \mathbf{R}\mathbf{u}_0$.

3.2. **Parametrisering av rotasjoner.** Matriseeksponenten som dukker opp i den ovenstående formelen er én av flere mulige parametriseringer av rotasjonsmatriser generelt. Denne variasjonen kalles *Euler-Rodriguez* (ER) formelen:

$$\mathbf{R}(\mathbf{n}\vartheta) = e^{\mathbf{S}(\mathbf{n}\vartheta)} = \mathbf{I} + \sin(\vartheta)\mathbf{S}(\mathbf{n}) + (1-\cos(\vartheta))\mathbf{S}^2(\mathbf{n}). \tag{22}$$

Det forenklede uttrykket på høyre hånd kan utledes med betydelig besvær. Et annet internasjonalt navn på ER-parametriseringen er "angle-axis" parametriseringen.

Oppgave 2.
Rotér vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

rundt aksen

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

med en vinkel $\vartheta = \pi/2$. Tegn opp den uroterte og den roterte vektoren sammen i et egnet koordinatsystem.

En annen svært populær parametrisering er *Eulervinklene*. Disse er en sekvens av tre spesialtilfeller til ER-parametriseringen.

Eksempel 2.
La $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$ angi en rotasjonsakse som sammenfaller med den *første* enhetsaksen og skriv $\vartheta = \phi$. Da evaluerer Euler-Rodriguez formelen til

$$\mathbf{R}(\mathbf{e}_1\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Eksempel 3.
La $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$ angi en rotasjonsakse som sammenfaller med den *andre* enhetsaksen og skriv $\vartheta = \theta$. Da evaluerer Euler-Rodriguez formelen til

$$\mathbf{R}(\mathbf{e}_2\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Eksempel 4.
La $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ angi en rotasjonsakse som sammenfaller med den *tredje* enhetsaksen og skriv $\vartheta = \psi$. Da evaluerer Euler-Rodriguez formelen til

$$\mathbf{R}(\mathbf{e}_3\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Denne formlenen er nyttig for rotasjoner i planet hvor man lar rotasjonsaksen "stå ut av papiret".

I fartøysstyring er det standard praksis å bygge opp rotasjonsmatriser etter konvensjonen "roll-pitch-yaw" som setter sammen de tre ovenstående matrisene på følgende vis

$$\mathbf{R}(\phi,\theta,\psi) = \mathbf{R}(\mathbf{e}_3\psi)\mathbf{R}(\mathbf{e}_2\theta)\mathbf{R}(\mathbf{e}_1\phi). \tag{28}$$

Vi kaller de tre vinklene (ϕ,θ,ψ) *Eulervinkler*. I et fartøy peker den første enhetsaksen $\mathbf{e}_1$ vanligvis langs lengderetningen, den andre $\mathbf{e}_2$ på tvers av lengderetningen mens den siste $\mathbf{e}_3$ peker opp eller ned avhengig av den aktuelle konvensjonen. Den ovenstående sekvensen roterer derfor ut en rull langs lengderetningen, deretter en pitch (nese opp/ned) og til sist en yaw som samsvarer med kursen til fartøyet. Se Fossen [2011] for en dyptpløyende diskusjon.

Den virkelig harde kjernen av kinematikere sverger til en parametrisering i kraft av kvaternioner som er *fire*-dimensjonale enhetsvektorer definert ved

$$\mathfrak{q} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta/2) \\ \mathbf{n}\sin(\vartheta/2) \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Kvaternionene generaliserer de komplekse tallene og er derfor utstyrt med en svært pen algebra. Hovedfordelen med kvaternioner er at de unngår et fenomen kalt "gimbal-lock" forbundet med Eulervinklene hvor de tre vinklene ikke lenger kan utvinnes éntydig fra rotasjonsmatrisen.

3.3. **Generelle egenskaper.** Rotasjonsmatriser tilfredsstiller de to sentrale egenskapene

$$\mathbf{R}^\intercal\mathbf{R} = \mathbf{I}, \quad \det(\mathbf{R}) = 1. \tag{30}$$

Vi kan benytte oss av Euler-Rodriguez formelen (22) for å bekrefte disse likhetene. Transponering kommuterer med matriseeksponensiering så vi har:

$$\mathbf{R}^\intercal\mathbf{R} = e^{\mathbf{S}^\intercal(\mathbf{n}\vartheta)}e^{\mathbf{S}(\mathbf{n}\vartheta)} = e^{(\mathbf{S}(\mathbf{n})+\mathbf{S}^\intercal(\mathbf{n}))\vartheta} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}. \tag{31}$$

Her er den skjevsymmetriske egenskapen til kryssproduktmatrisen igjen sentral. For determinantidentiteten kan vi appelere til *Jacobis formel*:

$$\det(e^{\mathbf{M}}) = e^{\mathrm{tr}(\mathbf{M})}. \tag{32}$$

I vårt tilfelle tar vi trasen til $\mathbf{S}(\mathbf{n}\vartheta)$ som er null på diagonal. Siden $e^0 = 1$ følger resultatet. Ikke prøv å utled ovenstående formel selv, med mindre du har mye tid.

Mengden av rotasjonsmatrisene danner et matematisk objekt kalt en *Lie-gruppe*. En gruppe $\mathcal{G} = (\mathrm{G}, *)$ er en kombinasjon av en mengde G og et binært produkt $(*) : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ på mengden hvor følgende holder:

***Assosiativitet**:* Produktet $(*)$ er assosiativt slik at delprodukter kan tas uten bekymringer med $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$.

***Identitet**:* Det eksisterer en identitet $e \in \mathrm{G}$ i mengden slik at $e * g = g * e = g$ for alle $g \in \mathrm{G}$.

Figur 2: Sophus Lie (1842-1899). Født i Nordfjordeid.

Invers: For alle $g \in \mathrm{G}$ eksisterer det en invers $g^{-1} \in \mathrm{G}$ i mengden slik at $g^{-1} * g = e$.

Lie-grupper tilføyer egenskapen at avbildningen $(g, h) \mapsto g^{-1} * h$ er *glatt*, men dette er veldig abstrakt. Hovedpoenget er her at Lieteori er like norsk som ostehøvelen! Se figur 2[2].

Gruppen av rotasjonsmatriser i n dimensjoner kalles ofte den *spesielle ortogonale* gruppen av dimensjon n. Den internasjonalt vedtatte benevnelsen er gitt ved

$$\mathrm{SO}(n) \triangleq \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(\mathbf{R}) = 1,\ \mathbf{R}^\intercal\mathbf{R} = \mathbf{I}\}. \tag{33}$$

Ordlyden *ortogonal* peker på den første egenskapen i (30) mens ordlyden *spesiell* omtaler enhetsdeterminanten til rotasjonsmatriser (som ikke gjelder for ortogonale matriser generelt), altså den andre egenskapen i (30).

Fordelen med gruppebildet er at det stadfester i) at hvis $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \in \mathrm{SO}(n)$ er rotasjonsmatriser, da er produktet også en rotasjonsmatrise $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 \in \mathrm{SO}(n)$ og ii) at hvis $\mathbf{R} \in \mathrm{SO}(n)$ da eksisterer den inverse matrisen $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\intercal \in \mathrm{SO}(n)$ som også er en rotasjonsmatrise. Identitetsmatrisen $\mathbf{I} \in \mathrm{SO}(n)$ er definisjonsmessig en rotasjonsmatrise. Bemerk at assosiativitet følger fra matriseproduktet som fungerer som gruppeoperasjon.

Oppgave 3.

Er følgende matriser rotasjonsmatriser?

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{2}+2 & -2 & 2-\sqrt{2} \\ 2 & 2\sqrt{2} & -2 \\ 2-\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2}+2 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

[2]By L. Szaciński (Christiania) - Flickr: Portrett av Sophus Lie, 1896, No restrictions, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=64917266.

3.4. **Differensiering av rotasjonsmatriser.** Rotasjonsmatriser er ofte tidsvarierende og da er det nødvendig (og nyttig) å kunne beregne den *tidsderiverte*.

Differensiering av rotasjonsmatriser leder til uttrykk som involverer kryssproduktmatrisen. Bemerk først at $\mathbf{R}\mathbf{R}^\intercal = \mathbf{I}$. Ved å differensiere denne relasjonen på begge sider kan vi fremskaffe identiteten

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\intercal = -\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^\intercal = -(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\intercal)^\intercal. \tag{34}$$

Dette betyr at $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\intercal$ er en skjevsymmetrisk matrise som kan parametriseres med

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\intercal = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}). \tag{35}$$

Her angir $\boldsymbol{\omega}$ en vektor av *vinkelhastigheter*:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Den differensierte av en rotasjonsmatrise er dermed gitt på formen av en *differensialligning*:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{R}. \tag{37a}$$

Man kan gjenta den foregående øvelsen med $\mathbf{R}^\intercal\mathbf{R} = \mathbf{I}$ som utgangspunkt. Da ledes man til den alternative formelen

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}'). \tag{37b}$$

Tolkningen av $\boldsymbol{\omega}$ (eller $\boldsymbol{\omega}'$) avhenger av anvendelsen til rotasjonsmatrisen. I denne teksten vil vi primært tolke vinkelhastighetene som rotasjonsraten til én koordinatramme ifht. en annen koordinatramme.

Oppgave 4.
Beregn den tidsderiverte av rotasjonsmatrisen $\mathbf{R}$ fra (27) og ekstraher $\boldsymbol{\omega}$ slik at du kan skrive $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{R}$.

Rotasjonsmatriser $\mathbf{R}$ og den skjevsymmetriske matrisen $\mathbf{S}$ tilfredsstiller den generelle egenskapen

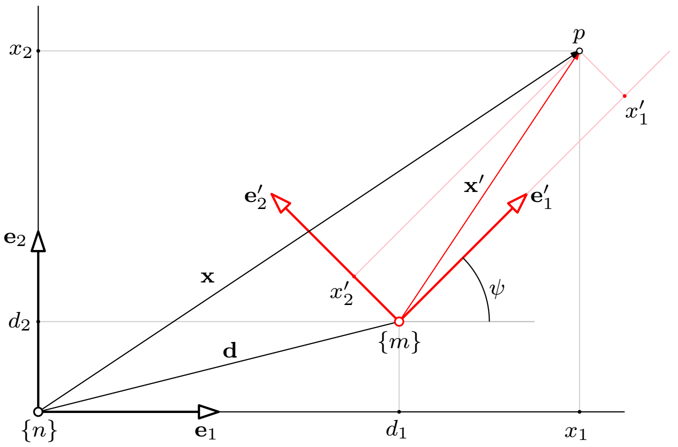
$$\mathbf{S}(\mathbf{R}\mathbf{u}) = \mathbf{R}\mathbf{S}(\mathbf{u})\mathbf{R}^\intercal \tag{38}$$

som er gyldig for alle vektorer $\mathbf{u}$ og rotasjonsmatriser $\mathbf{R}$. Identiteten gir oss relasjonen mellom $\boldsymbol{\omega}$ og $\boldsymbol{\omega}'$ i (37) som

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}') \implies \boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}'. \tag{39}$$

4 Stilling og koordinatsystemer

Betrakt figur 3 som viser to koordinatrammer: en nominell ramme $\{n\}$ og en modifisert ramme $\{m\}$. Koordinatrammer



Figur 3: To koordinatrammer $\{n\}$ og $\{m\}$ relatert med en rotasjon ψ (her rundt enhetsaksen $\mathbf{e}'_3$ som peker ut av papiret) og en forskyvning $\mathbf{d}$. Begge rammer beskriver punktet p med de respektive koordinatene $\mathbf{x}$ og $\mathbf{x}'$. Men, elementene i koordinatvektorene vil ikke sammenfalle da p måles fra forskjellige referansepunkt.

er *nødvendige* for å kvantifisere relative kvantiteter slik som posisjoner og hastigheter. Valget av koordinatramme er ofte ett av bekvemmelighet og i mange situasjoner er mer enn én ramme gunstig. Da er det nødvendig å kunne relatere data i én ramme til data i en annen.

I figuren vises det hvordan punktet p kan beskrives både med koordinatvektoren $\mathbf{x}$ tatt i $\{n\}$ og koordinatvektoren $\mathbf{x}'$ tatt i $\{r\}$. Disse koordinatvektorene vil være forskjellige, men peker allikevel på det samme objektet.

Koordinatvektoren $\mathbf{x}'$ sitter i det modifiserte koordinatsystemet $\{m\}$ som er rotert relativt til det nominelle $\{n\}$. Det første steget i å få relatert den til en koordinatvektor $\mathbf{x}$ i ramme $\{n\}$ er å endre basis med en rotasjonsmatrise. Det neste steget er å legge til distansen $\mathbf{d}$ som beskriver avstanden mellom rammene. Vi skriver dermed

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x}' + \mathbf{d}. \tag{40}$$

For å overbevise leseren om at denne ideen er gyldig gir vi et eksempel.

Eksempel 5.
I figur 3 (som viser et planutsnitt) er de respektive koordinatvektorene gitt ved

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 5\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rotasjonsmatrisen beskriver en rotasjon rundt den tredje enhetsaksen $\mathbf{e}_3 = \mathrm{col}(0,0,1)$[a] med vinkel $\psi = 45°$. Da kan vi bruke (27) med

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{e}_3\psi) = \begin{bmatrix} \cos(45°) & -\sin(45°) & 0 \\ \sin(45°) & \cos(45°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Distansevektoren er gitt ved $\mathbf{d} = \mathrm{col}(8,2,0)$. Dette gir oss

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}(\mathbf{e}_3\psi)\mathbf{x}' + \mathbf{d}$$

Kontrollberegning er en instruktiv øvelse og anbefales.

[a] Symbolet col stiller opp en kolonnevektor.

Oppgave 5.
Vis at den inverse av koordinattransformasjonen (40) er beskrevet ved

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}^\intercal(\mathbf{x} - \mathbf{d}). \tag{41}$$

4.1. **Stillingsmatriser.** Det er ofte nyttig å sammenfatte koordinattransformasjonen ved å benytte seg av en *stillingsmatrise*[3]. Først, la en utvidet koordinatvektor være gitt ved:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{42}$$

Definer dernest stillingsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Denne matrisen er 3×3 i $n = 2$ dimensjoner og 4×4 i $n = 3$ dimensjoner. Koordinattransformasjonen (40) kan nå skrives kompakt som

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}'. \tag{44}$$

Oppgave 6.
Beskriv stillingsmatrisen $\mathbf{P}$ som fremkommer i eksempel 5.

Stillingsmatriser har en rekke fordeler. Ikke minst fordi de danner en gruppe. Merk først at produktet av to stillingsmatriser er en stillingsmatrise:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 & \mathbf{d}_1 + \mathbf{R}_1\mathbf{d}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{45}$$

Dernest, observer at den inverse av en stillingsmatrise er en stillingsmatrise:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^\intercal & -\mathbf{R}^\intercal\mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}. \tag{46}$$

Til sist, bekreft at identitetsmatrisen er en stillingsmatrise. Vi har nå bevist at stillingsmatriser danner en gruppe.

Gruppen av stillingsmatriser er kjent som den *spesielle Euklidske gruppen*:

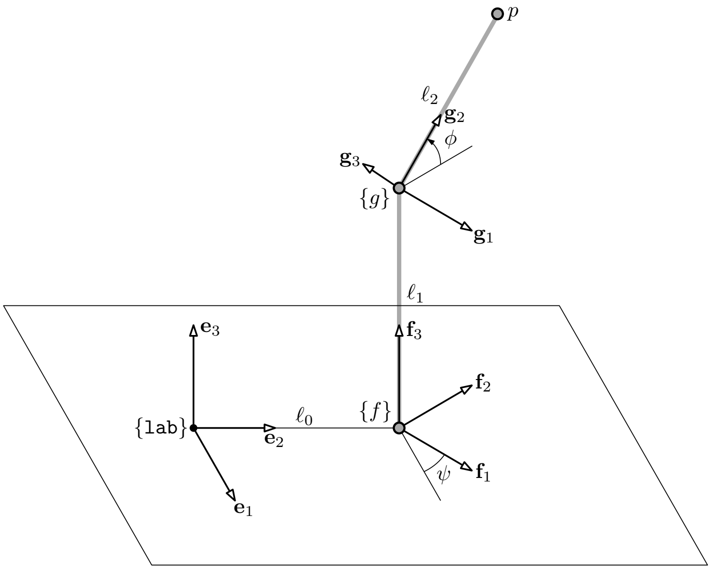
$$\mathrm{SE}(n) \triangleq \left\{ \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \middle| \mathbf{R} \in \mathrm{SO}(n),\ \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3 \right\}. \tag{47}$$

Denne gruppen er enda et eksempel på en Lie-gruppe.

4.2. **Kinematiske kjeder.** Gruppekarakteren til stillingsmatrisene lar oss sette sammen flere koordinattransformasjoner i serie: dette kalles en *kinematisk kjede*. Således kan man beskrive roboter slik den som er vist i figur 4.

For eksemplet i figuren behøver man to stillingsmatriser: i) $\mathbf{P}_2$ som relaterer koordinater i rammen $\{g\}$ fiksert på det

[3] Løst oversatt fra engelsk "pose-matrix".



Figur 4: En robotmanipulator med to ledd plassert i et laboratorie. Det første leddet roterer med en vinkel ψ rundt aksen $\mathbf{f}_3$. Det andre leddet roterer med en vinkel ϕ rundt aksen $\mathbf{g}_1$. På enden av det siste leddet befinner det seg en probe.

ytterste leddet til koordinater i rammen $\{f\}$ til det første leddet og ii) $\mathbf{P}_1$ som relaterer koordinater i rammen til det første leddet $\{f\}$ til referanserammen i laboratoriet $\{\texttt{lab}\}$. Da kan stillingsmatrisen som relaterer koordinater i ramme $\{g\}$ til ramme $\{\texttt{lab}\}$ beregnes som $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$.

Oppgave 7.
Betrakt roboten i figur 4 og anta $\ell_0 = \ell_1 = \ell_2 = 1$. Roboten beveges slik at proben bringes i kontakt med et objekt som skal måles. Proben gir utslag ved vinklene $\psi = \pi/2$ og $\phi = \pi/2$. Hva er koordinatene til objektet som blir probet, målt i laboratorierammen?

Referanser

T. I. Fossen. *Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, West Sussex, first edition, 2011.

D. Kalman. A singularly valuable decomposition: the svd of a matrix. *The college mathematics journal*, 27(1):2–23, 1996.