Fra Rolf Henriksen: "Systemtori" (Tapir 1987)

INVERS LAPLACETRANSFORMASJON

I kapittel 4 utledet vi fra Fouriertransformasjonen den inverse Laplacetransformasjonsformelen

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \tilde{u}(s)e^{st}ds \tag{A.1}$$

Vi skal her bevise innholdet av Påstand 4.1, dvs.

$$L^{-1}[\tilde{u}(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \tilde{u}(s)e^{st}ds = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}(a_k) \tag{A.2}$$

der $\mathrm{res}(a_k)$ betyr residuet til $\tilde{u}(s)e^{st}$ i den isolerte singulariteten a_k og der vi har antatt ialt n slike singulariteter. Integrasjonsbanen, dvs. σ, i lign. (A.1) og (A.2) skal være slik at alle singularitetene ligger til venstre for banen.

Å evaluere integralet i lign. (A.1) direkte vil som oftest være nokså vanskelig. Det vil som regel være mye enklere å benytte konturintegrasjon og residuesetningen, slik dette er kjent fra kompleks analyse. La oss betrakte den lukkede konturen som er vist i figur A.1. Dette er den såkalt <u>Bromwich-konturen</u>, og vi forutsetter at R er valgt så stor at konturen omslutter alle singularitetene til $\tilde{u}(s)e^{st}$. Fra kompleks analyse vet vi at integralet langs denne konturen blir

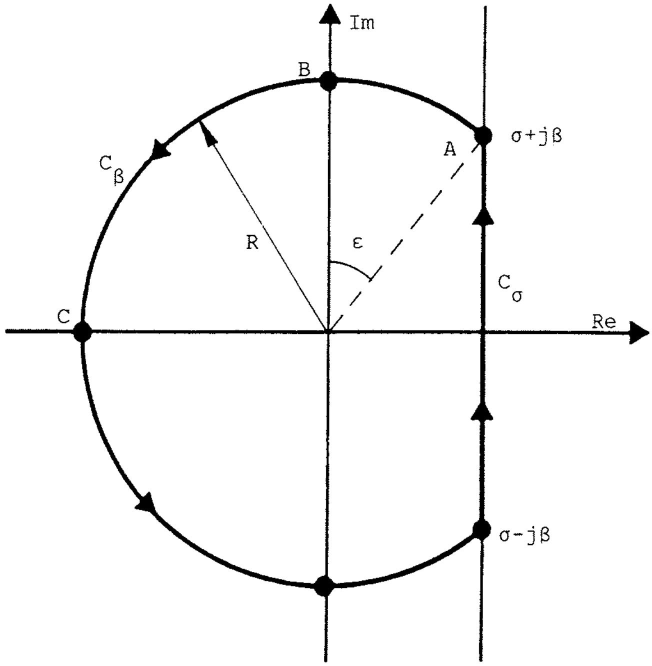
$$\int_{C_R} \tilde{u}(s)e^{st}ds = \int_{C_\beta} \tilde{u}(s)e^{st}ds + \int_{C_\sigma} \tilde{u}(s)e^{st}ds = 2\pi j \sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}(a_k) \tag{A.3}$$

Dette er den såkalte <u>residuesetningen</u>, og denne kan igjen utledes av <u>Cauchys integralsetning</u>, som lyder

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{g(z)}{z - z_0}\, dz \tag{A.4}$$

der $g(z)$ er analytisk innenfor og på den lukkede konturen C og der z_0 er et vilkårlig punkt innenfor C, se Kovach (1984). I lign. (A.3) har vi

$$\int_{C_\sigma} \tilde{u}(s)e^{st}ds = \int_{\sigma-j\beta}^{\sigma+j\beta} \tilde{u}(s)e^{st}ds, \tag{A.5}$$



Figur A.1. Bromwich-konturen.

og vi vil nå evaluere integralet

$$\int_{C_\beta} \tilde{u}(s)e^{st}ds \tag{A.6}$$

når $R \to \infty$, dvs. $\beta \to \infty$.

På grunn av symmetrien (polene og eventuelle nullpunkter i $\tilde{u}(s)e^{st}$ vil enten ligge på den reelle akse eller symmetrisk om denne) vil integralet i (A.6) kunne skrives som

$$\int_{C_\beta} \tilde{u}(s)e^{st}ds = 2[I_{AB} + I_{BC}] \tag{A.7}$$

der

$$I_{AB} = \int_{C_{AB}} \tilde{u}(s)e^{st}ds \tag{A.8}$$

$$I_{BC} = \int_{C_{BC}} \tilde{u}(s)e^{st}ds \tag{A.9}$$

La oss først betrakte I_{BC}. Langs konturen C_{BC} kan vi skrive $s = Re^{j\phi}$ og $ds = jRe^{j\phi}d\phi$. Ved innsetting av dette i lign. (A.9) får vi

$$I_{BC} = \int_{\pi/2}^{\pi} \tilde{u}(Re^{j\phi})e^{tRe^{j\phi}} jRe^{j\phi}d\phi \tag{A.10}$$

Ved innføring av $e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$ fremkommer

$$I_{BC} = \int_{\pi/2}^{\pi} \tilde{u}(Re^{j\phi})e^{Rt\cos\phi}Rje^{j(\phi+\sin\phi)}d\phi \tag{A.11}$$

Av denne følger

$$|I_{BC}| \leq R\int_{\pi/2}^{\pi} |\tilde{u}(Re^{j\phi})|e^{Rt\cos\phi}d\phi \tag{A.12}$$

La M(R) betegne maksimum av $|\tilde{u}(Re^{j\phi})|$ på konturen C_{AC} (siden $\tilde{u}$ er analytisk på C_{AC}, må $|\tilde{u}|$ ha et maksimum her). Da har vi

$$|I_{BC}| \leq RM(R)\int_{\pi/2}^{\pi} e^{Rt\cos\phi}d\phi \tag{A.13}$$

Nå innfører vi $\theta = \phi - \pi/2$, $d\theta = d\phi$, og får

$$|I_{BC}| \leq RM(R)\int_{0}^{\pi/2} e^{-Rt\sin\theta}d\theta \tag{A.14}$$

I intervallet $[0, \pi/2]$ er $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$, dvs. $e^{-2Rt\theta/\pi} \geq e^{-Rt\sin\theta}$ slik at

$$|I_{BC}| \leq RM(R)\int_{0}^{\pi/2} e^{-2Rt\theta/\pi}d\theta = \frac{\pi}{2}M(R)\frac{1-e^{-Rt}}{t} \tag{A.15}$$

Antar vi at $M(R) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ (det vil f.eks. være tilfellet dersom $\tilde{u}(s)$ er en rasjonal funksjon av formen $p(s)/q(s)$ der $\deg q(s) > \deg p(s)$), finner vi så

$$|I_{BC}| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \tag{A.16}$$

For integralet langs konturen C_{AB} finner vi på samme vis

$$|I_{AB}| \leq RM(R)\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} e^{Rt\cos\phi}d\phi \tag{A.17}$$

Her er $\cos\phi \leq \cos(\pi/2-\varepsilon)$ på intervallet $[\pi/2-\varepsilon, \pi/2]$ slik at

$$|I_{AB}| \leq RM(R)e^{\cos(\pi/2-\varepsilon)} \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} e^{Rt} d\phi = RM(R)e^{\sin\varepsilon}\varepsilon \tag{A.18}$$

fordi $\cos(\pi/2-\varepsilon) = \sin\varepsilon$. Her er $\sin\varepsilon = \sigma/R$ slik at

$$|I_{AB}| \leq M(R)e^{\sigma/R}\arcsin(\sigma/R) \tag{A.19}$$

der $e^{\sigma/R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 1$ og $\arcsin \sigma/R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, dvs. at

$$|I_{AB}| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \tag{A.20}$$

Av lign. (A.3), (A.5), (A.16) og (A.17) følger nå

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \tilde{u}(s)e^{st}ds = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}(a_k) \tag{A.21}$$

Dermed har vi bevist Påstand 4.1.