NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **hehehe hehehe**

Faglig kontakt under eksamen: hahaha

Tlf: TODO

Eksamensdato: høhøhø

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: E: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 8

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 Et andreordens polynom ser slik ut:

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

og likningene som ideelt sett skulle vært tilfredsstilt er

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La oss gange fra høyre med den transponerte av matrisen for å få normallikningene:

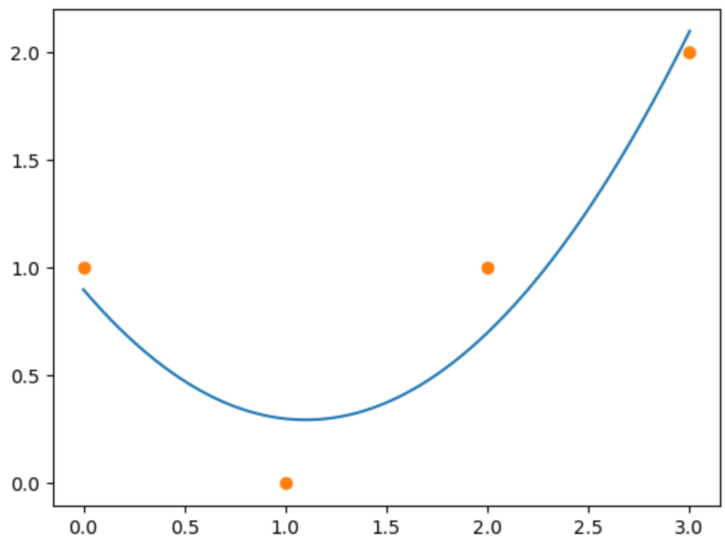
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eller

$$\begin{pmatrix} 98 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 6 \\ 14 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

som gir $a_2 = 1/2$, $a_1 = -11/10$ og $a_0 = 9/10$, slik at

$$p(x) = \frac{1}{10}\left(5x^2 - 11x + 9\right).$$



Oppgave 2 Her er oppskrift på en god parsevalsuppe. Oppskriften trenger ikke så mange ingredienser:

Aksiomer: Et komplekst indreproduktet er konjugert symmetrisk:

$$(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \overline{(\mathbf{w}, \mathbf{z})}$$

positivt definitt:

$$(\mathbf{z}, \mathbf{z}) > 0 \quad \text{dersom} \quad \mathbf{z} \neq \mathbf{0},$$

og lineært i enten første eller andre faktor, altså enten

$$(a\mathbf{z} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a(\mathbf{z}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

Antilinearitet: Det kan utledes at

$$(\mathbf{z}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = \overline{a}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + \overline{b}(\mathbf{z}, \mathbf{w})$$

Men oppskriften er krever litt teknikk, spesielt i oppkokningsfasen, her er det viktig å holde tungen beint i munnen så det ikke koker over.

1: Vi tar indreproduktet av $\mathbf{z}$ med seg selv:

$$(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{v}_k, \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{v}_k \right)$$

2: og ganger ut med reglene for linearitet og antilinearitet:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{v}_k, \sum_{l=1}^{n} c_l \mathbf{v}_l \right) &= \sum_{k=1}^{n} c_k \left(\mathbf{v}_k, \sum_{l=1}^{n} c_l \mathbf{v}_l \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{l=1}^{n} \overline{c_l} \left(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_k \overline{c_l} \left(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l \right) \end{aligned}$$

3: Så observerer vi at siden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ er en ortonormal vektormengde:

$$(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l) = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

blir det masse kanselleringer:

$$(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_k \overline{c_l} \left(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l \right) = \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{c_k} = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

4: Server i dype skåler sammen med en trekantet brødfigur som illustrerer relasjonen til Pytagoras' setning om sidekantene i en rettvinklet trekant.

Oppgave 3 Vi antar

$$\Psi(x,t) = f(t)\psi(x)$$

og setter inn i likningen:

$$i\hbar\dot{f}(t)\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}f(t)\psi''(x) + V(x)f(t)\psi(x)$$

Nå kan vi dele på $f\psi$ og skrive

$$i\hbar\frac{\dot{f}(t)}{f(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + V(x)$$

og observere at den ene siden kun avhenger av t og den andre kun av x. Dette impliserer at begge sidene må være konstante:

$$i\hbar\frac{\dot{f}(t)}{f(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + V(x) = E$$

Denne konstanten har åpenbart benevning Joule, derav E, og vi får differensial-likningene

$$i\hbar\dot{f}(t) - Ef(t) = 0$$

med løsning $f(t) = e^{-Eit/\hbar}$, og

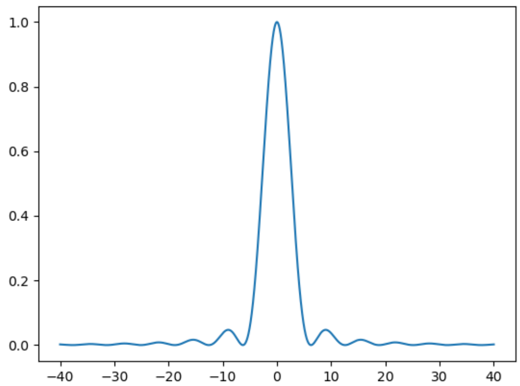
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi = E\psi$$

som kalles **den tidsuavhengige schrödingerlikningen**.

Oppgave 4

Vi beregner

$$\begin{aligned}\hat{x}(\omega) =& \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\ dt \\ =& 2\int_0^{\pi} (\pi - t)\cos(\omega t)\ dt \\ =& -\frac{2}{\omega}\int_0^{\pi}\sin(\omega t)\ dt \\ =& \frac{2}{\omega^2}\left(1 - \cos(\omega\pi)\right)\end{aligned}$$



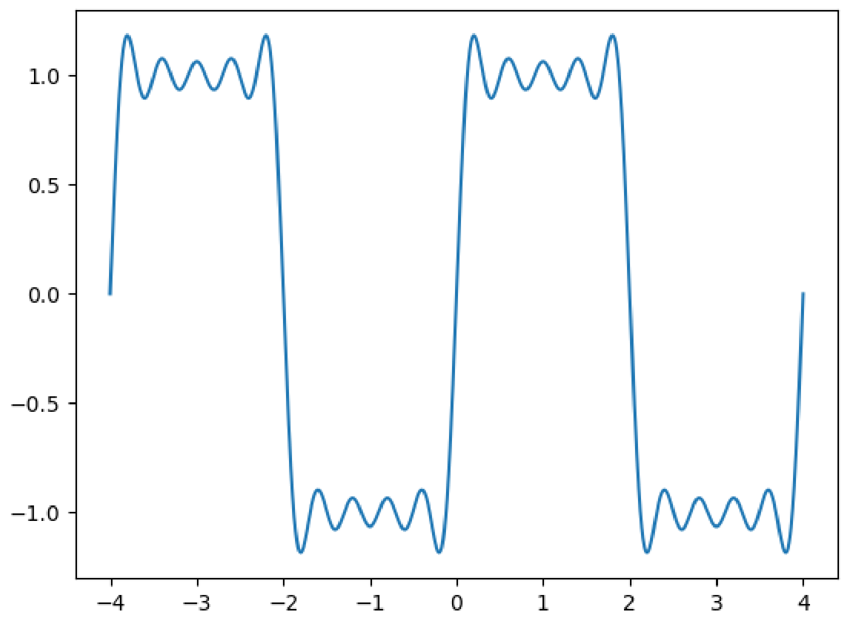
Oppgave 5 Et trent øye ser med en gang at dette er et odde signal, og vet med det at det mest effektive er å sette opp en ren sinusrekke. Siden fundamentalperioden er 4, blir fourierkoeffisientene

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} x(t)\sin(\pi n t/2)\ dt \\
&= \int_{0}^{2} x(t)\sin(\pi n t/2)\ dt \\
&= \int_{0}^{2} \sin(\pi n t/2)\ dt \\
&= \frac{2}{\pi n}\cos(\pi n t/2)\Big|_{2}^{0} = \frac{1}{\pi n}(1-\cos\pi n) = \begin{cases} 0 & \text{jevne } n \\ \frac{4}{\pi n} & \text{odde } n \end{cases}
\end{aligned}
$$

og fourierrekken

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\pi n t/2) \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin(\pi(2n-1)t/2)\,.
\end{aligned}
$$

Her er et plot av en partialsum:



Oppgave 6 Det karakteristiske polynomet er

$$\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{pmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2-1\right) - 1\cdot(-\lambda-1) + 1\cdot(1+\lambda)$$
$$= -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)\,2(\lambda+1)$$
$$= (\lambda+1)(2-\lambda(\lambda-1))$$
$$= (\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

slik at egenverdiene er -1 og 2. La oss begynne med den enkle egenverdien. Vi kunne gausset i vei, men siden vi elsker tall og observerer at tverrsummen av alle radene er 2, må egenvektoren være

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Så den doble. Siden

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ser vi at alle egenvektorer ligger i planet til likningen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

og vi må nå finne to ortogonale vektorer i dette planet. Hvis man er litt glad i tall, ser man kanskje at både

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

passer i likningen og er innbyrdes ortogonale. Merk at begge er ortogonale på $\mathbf{v}_1$, dette skjer automagisk siden matrisen er symmetrisk. Dersom vi normaliserer alle egenvektorer og setter dem opp som kolonner i en matrise

$$V = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

vil $A = VDV^T$, der

$$D = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Oppgave 7 Laplaceomvendingen er gitt ved

$$\mathcal{L}(x) = X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt$$

der $s = \sigma + \omega i$ er et komplekst tall. La $\sigma > 0$. Vi beregner

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\dot{x}) &= \int_0^\infty \dot{x}(t)e^{-st}\,dt \\ &= x(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt \\ &= s\mathcal{L}(x) - x(0).\end{aligned}$$

Regneregelen for s-skift kan vi får ved å laplaceomvende $y(t) = e^{at}x(t)$:

$$\begin{aligned}Y(s) &= \int_0^\infty y(t)e^{-st}\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{at}x(t)e^{-st}\,dt \\ &= \int_0^\infty x(t)e^{at-st}\,dt \\ &= \int_0^\infty x(t)e^{-(s-a)t}\,dt = X(s-a)\end{aligned}$$

mens t-skift fås ved å omvende $z(t) = u(t-a)x(t-a)$:

$$\begin{aligned}Z(s) &= \int_0^\infty u(t-a)x(t-a)e^{-st}\,dt \\ &= \int_a^\infty x(t-a)e^{-st}\,dt \\ &= \int_0^\infty x(v)e^{-s(v+a)}\,dv \\ &= e^{-sa}\int_0^\infty x(v)e^{-sv}\,dv = e^{-as}X(s).\end{aligned}$$

Oppgave 8 Her er Jens Glad Balchens berømte oppskrift på laplacegryte med diracstuing.

Ingredienser:

1: $\mathcal{L}(\dot{x}) = s\mathcal{L}(x) - x(0)$

2: $\mathcal{L}(\ddot{x}) = s\mathcal{L}(\dot{x}) - \dot{x}(0) = s^2\mathcal{L}(x) - sx(0) - \dot{x}(0)$

3: $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$

4: $\mathcal{L}(\delta(t-1)) = e^{-s}$

5: $\mathcal{L}\left(u(t-a)x(t-a)\right) = e^{-as}X(s)$

6: $\mathcal{L}\left(e^{at}x(t)\right) = X(s-a)$

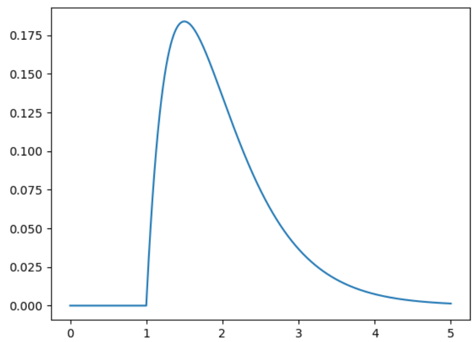
Oppskrift:

1: Vi omvender hele greia, bruker **1**, **2** og **4**, og får
$$X(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 4s + 4}.$$

2: Nå kombinerer vi **3** og **6** og observerer at
$$\mathcal{L}(te^{-2t}) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

3: Til slutt bruker vi **5** og ser at
$$\mathcal{L}\left(u(t-1)(t-1)e^{-2(t-1)}\right) = \frac{e^{-s}}{(s+2)^2}$$

4: slik at $x(t) = u(t-1)(t-1)e^{-2(t-1)}$.



Oppgave 9 La $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ være en ortogonal vektormengde som ikke inneholder nullvektoren, og la $(\cdot, \cdot)$ være indreproduktet de er innbyrdes ortogonale med hensyn på. De er lineært uavhengige dersom likningen

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

impliserer

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Vi tar indreproduktet av den øverste likningen med $\mathbf{v}_1$. På venstresiden får vi

$$\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_1\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k\left(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_1\right) = c_1\left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\right)$$

og på høyresiden får vi

$$(\mathbf{0}, \mathbf{v}_1) = 0$$

Vi vet at $\mathbf{v}_1$ ikke er nullvektoren, og da gir det andre aksiomet for indreprodukt at $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) > 0$, slik at $c_1 = 0$ er eneste mulighet. Dette resonnementet kan gjentas for alle c_k, og dermed ser vi at $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Oppgave 10 En generell projeksjonsmatrise P er definert ved likningen

$$P = P^2.$$

La λ være egenverdien til egenvektoren $\mathbf{x}$. Vi beregner

$$\lambda\mathbf{x} = P\mathbf{x} = P^2\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$$

slik at

$$\left(\lambda - \lambda^2\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Siden nullvektoren ikke klassifiserer som egenvektor, må vi ha

$$\lambda - \lambda^2 = \lambda\left(1 - \lambda\right) = 0$$

altså at $\lambda = 1$ eller $\lambda = 0$.