Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4101 Matematikk 1 for MTELSYS - LF**

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Eksamensdato: 30.11.2022

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: E: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 5

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Funksjonen $f : A \to f(A)$ sin inverse funksjon eksisterer dersom f er injektiv, og f^{-1} tilfredsstiller likningen

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

for alle $x \in A$. Men siden f er den inverse til f^{-1}, må vi også ha at

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

for alle $x \in f(A)$. Hvis vi deriverer denne likningen med kjerneregelen, får vi

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = 1$$

eller

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Dersom vi setter $f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = \tan x$ og husker at

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

detter

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + \tan^2\left(\arctan(x)\right)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

rett ut.

Oppgave 2 Vi sier at vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ... $\mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige dersom

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

impliserer at

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Anta nå at både

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{w}$$

og

$$d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n = \mathbf{w}$$

Dersom vi trekker disse to likningene fra hverandre, får vi

$$(c_1 - d_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - d_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{w} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

og siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ... $\mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige må

$$c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = \cdots = c_n - d_n = 0$$

slik at

$$c_1 = d_1, c_2 = d_2 = \cdots c_n = d_n.$$

Oppgave 3 Siden

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

blir buelengden

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 1/\left(1+x^2\right)^2}\, dx$$

En med svart belte i bestemte integralet klarer kanskje denne på strak arm, hva vet jeg. Jeg har i hvertfall ikke peiling. Trapesmetoden er

$$\int_a^b g \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{g(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i) + \frac{g(b)}{2}\right)$$

Pythonscriptet under produserer tilnærmingen $L \approx 1.2779780590915992$.

```
import numpy as np

#antall punkt
n=10000

#gitter
x=np.linspace(0,1,num=n+1)

# funksjonsverdi i endepunktene til gitteret
f=np.sqrt(2)+np.sqrt(5)/2

#trapesmetoden, indre punkter på gitteret
for i in range(n-1):

    f=f+2*np.sqrt(1+1/(1+x[i+1]**2)**2)

print(f/(2*n))
```

Oppgave 4 Velg $\epsilon > 0$. Vi må vise at det går an å velge $\delta > 0$ slik at $|x - x_0| < \delta$ impliserer

$$|f_1(x) + f_2(x) - L_1 - L_2| < \epsilon$$

Merk først at

$$|f_1(x) + f_2(x) - L_1 - L_2| = |f_1(x) - L_1 + f_2(x) - L_2| \leq |f_1(x) - L_1| + |f_2(x) - L_2|$$

Siden f_1 har grenseverdien L_1, og f_2 har grenseverdien L_2, kan vi velge $\delta > 0$ slik at $|x - x_0| < \delta$ impliserer

$$|f_1(x) - L_1| < \epsilon/2 \quad \text{og} \quad |f_2(x) - L_2| < \epsilon/2.$$

(Samme argument som over, du kan velge δ_1 for den ene ulikheten og δ_2 for den andre og så bare velge den minste av dem.) Men i så fall impliserer $|x - x_0| < \delta$ at

$$|f_1(x) - L_1 + f_2(x) - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

Hvis du nå leser definisjonen av grenseverdi nøye, ser du at her står det jo at grenseverdien til $f_1 + f_2$ er $L_1 + L_2$.

Oppgave 5

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T=20
N=2000
h=T/N

t=np.zeros(N+1)
x=np.zeros(N+1)
y=np.zeros(N+1)

x[0]=1
y[0]=1

for i in range(N):
    x[i+1]=x[i]+h*x[i]*(1-y[i])
    y[i+1]=y[i]+h*y[i]*(x[i]-1)
    t[i+1]=t[i]+h


plt.plot(t,x)
plt.plot(t,y)
plt.savefig('lotkavolterra-tid.png')

plt.figure()
plt.plot(x,y)
plt.savefig('lotkavolterra-fase.png')
```

Oppgave 6 Dersom g er deriverbar på et intervall som inneholder både x_n og r, sier sekantsetningen at det må finnes en s mellom disse to slik at

$$g'(s) = \frac{g(x_n) - g(r)}{(x_n - r)} = \frac{x_{n+1} - r}{(x_n - r)}$$

som gir at

$$x_{n+1} - r = g'(s)(x_n - r).$$

Denne likningen forteller oss noe om avstanden mellom iterasjonene og løsningen r, og vi ser nå hvorfor det er lurt å ha enn viss peiling på hvorvidt $|g'| < 1$ før vi programmerer opp og trykker på kjør.

Oppgave 7 En sirkel med senter i origo og radius r har likning

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

så vi kan lage en kule ved å dreie $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

en gang om x-aksen, og beregne

$$V = \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \, dx = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Oppgave 8 Analysens fundamentalteorem kan skrives

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$$

under antagelsen om at f' er kontinuerlig. Antar vi tillegg at f'' er kontinuerlig, kan vi velge

$$v(t) = x - t \qquad \text{og} \qquad u(t) = f'(t)$$

og delvisintegrere en gang

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt \\
&= f(a) - \int_a^x (-1) \cdot f'(t)\, dt \\
&= f(a) - \left(f'(a)(x-t) \Big|_{t=a}^{t=x} - \int_a^x (x-s) f''(t)\, dt \right) \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-s) f''(t)\, dt
\end{aligned}$$

som er Taylors formel for $n = 1$.

Oppgave 9 Halveringstiden til C-14 er omtrent 5730 år, og differensiallikningen er

$$\dot{x} = ax$$

der x er $C-14$-konsentrasjonen. Hvis vi antar at startkonsentrasjonen er $x(0) = 1$, har vi at

$$x(t) = e^{at}$$

og dersom vi vi måler t i år og krever at

$$e^{5730a} = x(5730) = \frac{1}{2}$$

får vi at

$$a = -\frac{\ln 2}{5730}$$

slik at

$$x(t) = e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}.$$

Hvis vi nå krever at $x(t) = 0.27$, får vi

$$0.27 = e^{-\frac{\ln 2}{5730}t},$$

som gir

$$t = -\frac{5730 \ln 0.27}{\ln 2}.$$

Oppgave 10 Vi gausseliminerer

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Av denne gaussingen ser vi at det eksisterer en lineær avhengighetsrelasjon mellom alle kolonnene i matrisen, men ikke mellom de tre første kolonnene. Dette betyr at alle vektorer i kolonnerommet kan skrives som en lineærkombinasjon av de tre første kolonnene. Følgelig er de tre første kolonnene en basis for kolonnerommet, og altså er kolonnerommet tredimensjonalt.