NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
TMA4101 Matematikk 1 for MTELSYS, MTTK og MTKJ

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome
Tlf: 90849783

Eksamensdato: 30.11.2022
Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: E: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 2
Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Skriv opp definisjonen på invers funksjon og vis at

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

dersom f er injektiv og deriverbar og $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$. Tegn en figur som illustrerer denne derivasjonsregelen og vis at

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Oppgave 2 Skriv opp definisjonen på lineær uavhengighet og vis at dersom

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

og $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige, så er $c_1, c_2, \cdots, c_n$ entydig bestemt.

Oppgave 3 Sett opp uttrykket for buelengden til $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \arctan x,$$

og skriv (for hånd) et pythonscript som beregner et estimat for buelengden ved trapesmetoden.

Oppgave 4 Skriv opp definisjonen på grenseverdi og bruk den til å vise at dersom

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = L_1 \quad \text{og} \quad \lim_{x\to x_0} f_2(x) = L_2,$$

så er

$$\lim_{x\to x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = L_1 + L_2.$$

Oppgave 5 Skriv en pythonkode som løser Lotka-Volterra-systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - xy \qquad x(0) = 1 \\ \dot{y} &= -y + xy \qquad y(0) = 1 \end{aligned}$$

med Eulers eksplisitte metode.

Oppgave 6 Fikspunktiterasjonen

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

leter etter løsningen r til likningen

$$r = g(r).$$

Bruk sekantsetningen til å vise at dersom g er deriverbar på et intervall som inneholder x_n og r, så finnes det en s mellom x_n og r slik at

$$x_{n+1} - r = g'(s)(x_n - r).$$

Oppgave 7 Utled formelen for volumet til en kule med radius r.

Oppgave 8 Utled Taylors formel (for $n = 1$)

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-s)f''(s)\, ds$$

fra analysens fundamentalteorem og antagelsen om at f'' er kontinuerlig på et intervall som inneholder x og a.

Oppgave 9 En død grevling inneholder 27 prosent av din C-14-konsentrasjon. Finn ut når grevlingen avgikk med døden.
(Du kan anta at du er i live, og at halveringstiden til C-14 er 5730 år.)

Oppgave 10 Alle lineærkombinasjoner av kolonnene i matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

danner et vektorrom. Hvor mange dimensjoner har dette vektorrommet?